目　　录

第一讲　调和函数的几何理论

§1. 旧事重提

在复平面上变形[1)]

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad |a|<1 \tag{1}$$

及

$$w=e^{i\theta}z. \tag{2}$$

由 (1) 推得

$$1-|w|^2=1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$$

$$=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-a\bar{z}|^2}. \tag{3}$$

因此(1)把单位圆 $|z|=1$ 变为单位圆 $|w|=1$，单位圆内部变为单位圆内部．变形(2)也有此性质．并且(1)把 $z=a$ 变为 $w=0$.

微分 (1) 式得

$$dw=\frac{dz}{1-\bar{a}z}+\frac{(z-a)\bar{a}dz}{(1-\bar{a}z)^2}=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz. \tag{4}$$

(3)、(4) 相除，取绝对值的平方得出经过 (1)、(2) 不变的微分型

$$\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{5}$$

与此微分二次型相对应的有不变的微分算子

---

1) 这儿 $\bar{a}$ 代表 a 的共轭虚数．

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\overline{w}}=(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\overline{z}}. \tag{6}$$

这就是 Laplace 算子

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}.$$

(1)既然把单位圆变为单位圆,则当 $z=e^{i\tau}(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$时,$w=e^{i\psi}$,即

$$e^{i\psi}=\frac{e^{i\tau}-a}{1-\bar{a}e^{i\tau}}=\frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\bar{a}e^{i\tau}}e^{i\tau}.$$

这代表变形(1)在单位圆圆周上所引起的变化. 而(4)式变为

$$e^{i\psi}d\psi=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}d\tau.$$

两者相除得出

$$d\psi=\frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau. \tag{7}$$

命

$$a=\rho e^{i\theta},\quad \rho<1$$

及

$$P(\rho,\theta-\tau)=\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}. \tag{8}$$

这个函数称为 Poisson 核,因此, Poisson 核是单位圆经(1)变为自己所得出的函数行列式. Poisson 核有以下的特点:

(i) 定正性. 当 $\rho<1$ 时,$P(\rho,\theta-\tau)>0$.

(ii) $\lim\limits_{\rho\to 1}P(\rho,\theta-\tau)=\begin{cases}0, & 若\quad \theta\neq\tau,\\ \infty, & 若\quad \theta=\tau.\end{cases}$

(iii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)d\tau=1.$

这结果也是显然的,其理由是,由(7)得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\psi=1.$$

性质 (ii) 与 (iii) 合并称为“δ函数的性质”.

(iv) 当 $\rho<1$ 时, 它适合于 Laplace 方程(极座标形式)

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{9}$$

要证明这一点也是十分容易的,因为

$$P(\rho,\theta-\tau)=1+\frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}}+\frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\tau),$$

而 $\rho^n\cos n(\theta-\tau)$ 显然适合于(9), 因而 $P(\rho,\theta-\tau)$ 也适合于(9).

解单位圆的 Dirichlet 问题.

给一个以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(\theta)$, 求一函数 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合于 Laplace 方程[1], 且

$$\lim_{\rho\to 1}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(\theta). \tag{10}$$

这就是有名的 Dirichlet 问题.

我们分以下几个步骤来解决这一问题:

(1) 先证“均值公式”: 如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内有二阶连续偏微商,而且适合 Laplace 方程(9),在圆内及圆周上连续,则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta=u(0),\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1. \tag{11}$$

证法是: 由 Laplace 方程知

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0.$$

求积分得

1) 适合 Laplace 方程的函数称为调和函数.

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = k.$$

当 $\rho = 0$ 时,可见 $k = 0$. 再积分,得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = c,$$

是一与 ρ 无关的常数,再取 $\rho = 0$,得(11)式.

(2) 依(1)换变数,命

$$v(z) = u(w),$$

则

$$v(e^{i\tau}) = u(e^{i\psi}), \quad v(a) = u(0).$$

(11)式变为 ($\rho = 1$)

$$v(a) = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\psi})d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\tau})\frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau.$$

命 $a = \rho e^{i\theta}$ 及换符号则得 Poisson 公式

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\tau})\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}d\tau. \quad (12)$$

换言之,如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 是一个调和函数,则有以上的公式.

(3) 最大(最小)值原理. 一个单位圆内的调和函数,如果不是常数,则一定在圆周上取最大(最小)值.

如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 最大,由(12)可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\tau})\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}d\tau$$

$$\leqslant u(\rho e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1 - \rho^2)d\tau}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} = u(\rho e^{i\theta})$$

并且仅当 u 是常数时取等号,不然,总有一段弧,其中 $u(e^{i\tau}) < u(\rho e^{i\theta})$,因而上式取不等号.

同样最小值也在圆周上取.

(4) Dirichlet，问题解答的唯一性.

如果有两个解 $u(\rho e^{i\theta})$, $v(\rho e^{i\theta})$ 适合于(10)，则

$$w(\rho e^{i\theta}) = u(\rho e^{i\theta}) - v(\rho e^{i\theta})$$

也是调和函数,在圆周上这函数等于0,即 $w(e^{i\theta}) = 0$. 由(3)可知在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 上，$w(\rho e^{i\theta})$ 的最大值 $\leqslant 0$，最小值 $\geqslant 0$，因而 $w \equiv 0$. 因而解答是唯一的.

(5) 解答的存在性.

考虑 Poisson 积分

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{13}$$

这函数有以下的一些性质：首先由性质 (iv) 可知 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合 Laplace 方程，其次由“δ 函数”性质可以证明(10)式. 由性质(iii)

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\varphi(\theta)d\tau.$$

因为 $\varphi(\theta)$ 是连续函数,给了 ε，存在 δ 使 $|\theta - \tau| < \delta$ 时,

$$|\varphi(\theta) - \varphi(\tau)| < \varepsilon. \tag{14}$$

把积分

$$u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))d\tau$$

分为两部分,由(14)可知

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta} P(\rho,\theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))d\tau\right|$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta - \tau)d\tau = \varepsilon.$$

另一方面,当 $|\theta - \tau| \geqslant \delta$ 时,可以取 ρ 充分接近于1使

$$P(\rho, \theta - \tau) < \varepsilon/2M,$$

这儿 M 是 $|\varphi(\tau)|$ 的上界. 于是

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta}P(\rho,\theta-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(\theta))d\tau\right|<2M\cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2M}\,d\tau=\varepsilon.$$

合并之，得出当 ρ 充分接近于 1 时，

$$|u(\rho e^{i\theta})-\varphi(\theta)|<2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\rho\to1}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(\theta).$$

因而公式（13）解决了单位圆的 Dirichlet 问题的存在性部分.

§2. 实数形式

为了看出推广的可能性，先看 §1 的结果的实数形式，先看变形（1.1）的实数形式：

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}=\frac{(z-a)(1-a\bar{z})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}=\frac{z-a-az\bar{z}+a^2\bar{z}}{1-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}z\bar{z}}.$$

把复数 v 写成为 $\xi+i\eta$，而以 v^* 代表矢量 (ξ,η)，显然有

$$a\bar{b}+\bar{a}b=2a^*b^{*\prime}.$$

又由于

$$a^2\bar{z}=(b^2-c^2+2bci)(x-iy),\quad(a=b+ic)$$

所以

$$\begin{aligned}(a^2\bar{z})^*&=[(b^2-c^2)x+2bcy,\ 2bcx-(b^2-c^2)y]\\&=(x,y)\begin{pmatrix}b^2-c^2, & 2bc\\ 2bc, & -b^2+c^2\end{pmatrix}\\&=(x,y)[2(b,c)'(b,c)-(b,c)(b,c)'I]\\&=z^*(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I),\end{aligned}$$

这儿依照矩阵相乘的法则办事，因此得

$$w^*=\frac{z^*-a^*-z^*z^{*\prime}a^*+z^*(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I)}{1-2a^*z^{*\prime}+a^*a^{*\prime}z^*z^{*\prime}}.$$

§ 3. 单位球的几何学

以上的实形式建议以下的可能推广：

命 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 代表一 n 维矢量，而

$$xx'<1 \tag{1}$$

代表一单位球，以上建议

$$y=\frac{x-a-xx'a+x(2a'a-aa'I)}{1-2ax'+aa'xx'},\quad aa'<1 \tag{2}$$

可能是一个变形把单位球一对一地变为其自己，而且把 $x=a$ 变为 $y=0$。

先把 y 写成为

$$y=\frac{(1-aa')(x-a)-a(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'},\quad aa'<1. \tag{3}$$

作内积

$$\begin{aligned}yy'&=\frac{(1-aa')^2(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&\quad-\frac{2(1-aa')(x-a)(x-a')a(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&\quad+\frac{aa'[(x-a)(x-a)']^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&=\frac{(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}[(1-aa')^2\\&\quad-2(1-aa')(x-a)a'+aa'(x-a)(x-a)']\\&=\frac{(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'}.\end{aligned} \tag{4}$$

由（3）可知 $\quad y+yy'a=\dfrac{(1-aa')(x-a)}{1-2ax'+aa'xx'},\quad$ (5)

再作内积

$$(y+yy'a)(y+yy'a)'=\frac{(1-aa')^2(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}.$$

由(4)得 $yy'(1+2ay'+aa'yy')=\dfrac{(1-aa')^2yy'}{1+2ax'+aa'xx'}.$

如果 $yy'=0$，则 $y=0$，由(4)得 $x=a$. 如果 $yy'\neq 0$，则得等式

$$1+2ay'+aa'yy'=\frac{(1-aa')^2}{1-2ax'+aa'xx'} \tag{6}$$

(这对 $y=0$, $x=a$ 也对). 代入(5)式得

$$x=a+\frac{(y+yy'a)(1-aa')}{1+2ay'+aa'yy'},$$

即

$$x=\frac{y+a+ayy'+y(2a'a-aa'I)}{1+2ay'+aa'yy'}. \tag{7}$$

这与(2)的形式完全相同，只不过把 a 换成 $-a$ 而已. 因此(2)的确是一个一对一的变形(对整个空间都如此，除去分母为 0 的情况，不难证明，例外仅有 $y=-a/(aa')$ 一点而已).

再由(4)可知

$$1-yy'=\frac{1-2ax'+aa'xx'-(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'}$$

$$=\frac{(1-aa')(1-xx')}{1-2ax'+aa'xx'}. \tag{8}$$

由 Schwarz 不等式可知，分母

$$1-2ax'-aa'xx'=(1-ax')^2+aa'xx'-(ax')^2>0,$$

这又证明了(2)把单位球变为其自己.

除形式(2)的变形以外，变形

$$y=x\Gamma,\quad \Gamma\Gamma'=I \tag{9}$$

也显然把单位球变为其自己.

(2)与(9)所演出的群就是我们所要讨论的群. 我们现在是研究在此群下，单位球内点所成的空间的几何学.

这个空间称为双曲空间，由(2)和(9)所演出的群称为非欧运动群.

在此群下，球内任一点可以变为原点，而且任意相互正交的 n 个方向可以变为 n 个坐标轴的正向.

§4. 微分度量

求变形

$$y=\frac{(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a}{1-2ax'+aa'xx'}$$

的微分，有

$$\begin{aligned}(1-2ax'+aa'xx')^2dy&=(1-2ax'+aa'xx')\\&\quad\times[(1-aa')dx-2dx(x-a)'a]\\&\quad-[-2dxa'+2aa'dxx'][(1-aa')(x-a)\\&\quad-(x-a)(x-a)'a]=(1-aa')dx\\&\quad\times\{(1-2ax'+aa'xx')I-2(1-2ax')x'a\\&\quad+2a'x-2xx'a'a-2aa'x'x\}\\&=(1-aa')dx\{(1-2ax'+aa'xx')I-2(1-ax')\\&\quad\times(x'a-a'x)+2(x'a-a'x)^2\}.\end{aligned}$$

命

$$\begin{aligned}P=&(1-2ax'+aa'xx')I-2(1-ax')(x'a-a'x)\\&+2(x'a-a'x)^2\end{aligned}$$

及

$$M=x'a-a'x,\quad \lambda=1-2ax'+aa'xx',\tag{1}$$

则

$$P=\lambda I-2(1-ax')M+2M^2\tag{2}$$

及

$$dy=\frac{1-aa'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}dxP.\tag{3}$$

易证:

$$\begin{aligned} xM^2 &= [(ax')^2 - aa'xx']x, \\ aM^2 &= [(ax')^2 - aa'xx']a, \\ M^3 &= [(ax')^2 - aa'xx']M. \end{aligned} \tag{4}$$

因此得出

$$\begin{aligned} PP' &= (\lambda I - 2(1 - ax')M + 2M^2) \\ &\quad \times (\lambda I + 2(1 - ax')M + 2M^2) \\ &= (\lambda I + 2M^2)^2 - 4(1 - ax')^2M^2 \\ &= \lambda^2 I + 4(\lambda - (1 - ax')^2)M^2 + 4M^4 \\ &= \lambda^2 I + 4M\{[aa'xx' - (ax')^2]M + M^3\} \\ &= \lambda^2 I. \end{aligned} \tag{5}$$

因此

$$\begin{aligned} dydy' &= \frac{(1 - aa')^2}{(1 - 2ax' + aa'xx')^4} dxPP'dx' \\ &= \frac{(1 - aa')^2}{(1 - 2ax' + aa'xx')^2} dxdx'. \end{aligned} \tag{6}$$

与(3.8)联立,立刻推得

$$\frac{dydy'}{(1 - yy')^2} = \frac{dxdx'}{(1 - xx')^2}. \tag{7}$$

这关系也是经过(3.9)而不变的,因此(7)是一个不变的微分二次型.

§5. 微 分 算 子

今往证明偏微分方程

$$(1 - yy')^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + 2(n - 2)(1 - yy') \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} = 0. \tag{1}$$

经变形(3.2)而不变,(1)可以改写为

$$(1 - yy')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[(1 - yy')^{2-n} \frac{\partial u}{\partial y_i}\right] = 0,$$

即待证

$$(1-yy')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[(1-yy')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]$$

$$= (1-xx')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]. \qquad (2)$$

在证明 (2) 成立前,先证明以下的一些结果.

引理 1 命 $\mu = 1 + 2ay' + aa'yy'$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right) = 0. \qquad (3)$$

证 由 (3.7) 已知

$$x_k = a_k + \frac{(1-aa')(y_k+yy'a_k)}{1+2ay'+aa'yy'},$$

即待证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{y_k+yy'a_k}{\mu} = 0. \qquad (4)$$

左边等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^{n}}\Big[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2(y_k+yy'a_k)(a_i+aa'y_i)\Big] = \frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}$$

$$\times \{[2a_k(1+2ay'+aa'yy')+2(\delta_{ik}+2y_ia_k)$$

$$\times (a_i+aa'y_i)-2(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa'y_i)$$

$$-2(y_k+yy'a_k)aa'](1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2n[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2(y_k+yy'a_k)(a_i+aa'y_i)](a_i+aa'y_i)\}$$

$$= \frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\{[2a_k(1+2ay')-2y_kaa'](1+2ay'$$

$$+aa'yy')-2n(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa'y_i)$$

$$\times (1 + 2ay' + aa'yy') + 4n(y_k + yy'a_k)$$
$$\times (a_i + aa'y_i)(a_i + aa'y_i)\}$$
$$= \frac{1}{\mu^n}\{n[2a_k(1 + 2ay') - 2y_k aa'] - 2n(a_k + aa'y_k$$
$$+ 2ay'a_k + 2aa'yy'a_k) + 4n(y_k + yy'a_k)aa'\} = 0.$$

引理 2

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\lambda^2}{(1 - aa')^2}\delta_{jk}.$$

这是极易从

$$dydy' = \frac{(1 - aa')^2}{\lambda^2} dxdx'$$

推得的.

现在往证 (2) 式.

由 (3.8) 立刻推出

$$\left(\frac{(1 - aa')(1 - xx')}{\lambda(x)}\right)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{(1-aa')(1-xx')}{\lambda(x)}\right)^{2-n}\right.$$
$$\left.\times \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right]\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = (1 - aa')^2\left(\frac{1 - xx'}{\lambda(x)}\right)^n$$
$$\times \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(1 - xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$
$$+ (1 - aa')^2\left(\frac{1 - xx'}{\lambda(x)}\right)^n \sum_{i,j,k}(1 - xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}$$
$$\times \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = s_1 + s_2.$$

由引理 2, s_1 就是 (2) 式的右边, 因此待证 $s_2 = 0$. 也就是要证明

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0.$$

这等式显然易由下面的等式推出:

$$\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i}=0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)=0.$$

由(3.6)得 $\lambda\mu=(1-aa')^2$,以上的等式显然可由引理 1 推出.

§6. 球 坐 标

命

$$x=\rho u,\quad uu'=1,$$

则 $du\cdot u'=0$. 因此

$$dxdx'=(d\rho u+\rho du)(d\rho u+\rho du)'$$
$$=d\rho^2+\rho^2 dudu'.$$

所以得到

$$\frac{dxdx'}{(1-xx')^2}=\frac{d\rho^2+\rho^2 dudu'}{(1-\rho^2)^2}. \tag{1}$$

引进球座标

$$u=(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1\cos\theta_2,\ \sin\theta_1,\ \sin\theta_2,\ \cos\theta_3,\ \cdots,$$
$$\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\ \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}),$$
$$0\leqslant\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{n-2}\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

单位圆的圆周可以表成为 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 但并不能说单位圆的圆周就等价于区间 $[0,\ 2\pi]$, 在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上的连续函数并不一定是单位圆周上的连续函数. 其原因是 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 实际上代表同一点,因此在说到单位圆周上的连续函数 $f(\theta)$ 时, 必须理解到它是一个以 2π 为周期的函数.

在球面上情况更为复杂: 因为 $(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1,\ \cos_2,\ \cdots,\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1})$ 并不是 θ_1 的以 π 为周期的函

数，在球面上怎样定义一个函数

$$f(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}),\ 0 \leqslant \theta_1, \cdots, \theta_{n-2} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi$$

的连续性，主要看区间端点的情况．先看 $\theta_1 = 0$ 所代表的点，不管 $\theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$，如何，当 $\theta_1 = 0$ 时，则 $u = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$，因此在 $u = e_1$ 时球面上的连续函数 $f(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ 必须使

$$\lim_{\theta_1 \to +0} f(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$$

存在，而且与 $\theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ 无关．同理

$$\lim_{\theta_1 \to \pi - 0} f(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$$

是 $u = -e_1$ 时的函数值，与 $\theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ 无关．同理

$$\lim_{\theta_2 \to +0} f(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$$

与 $\theta_1, \theta_3, \cdots, \theta_{n-1}$ 无关，等等．最后

$$\lim_{\theta_{n-1} \to +0} f(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = \lim_{\theta_{n-1} \to 2\pi - 0} f(\theta, \cdots, \theta_{n-1}).$$

适合这些条件的连续函数才是球面上的连续函数．

微分矢量 u，极易推出

$$dudu' = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-2} d\theta_{n-1}^2. \tag{2}$$

单位球表面积的元素 $\dot{u}$ 是这微分二次型的行列式的平方根，即

$$\dot{u} = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1},$$

不难算出总表面积等于 $\omega_{n-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

易知 Laplace 算子（也不难直接算出）

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{3}$$

的极座标形式是

$$\Delta^2 = \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \partial_u^2, \tag{4}$$

这儿

$$\partial_u^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2}$$

$$+ (n-2)\mathrm{ctg}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1} + (n-3)\frac{\mathrm{ctg}\theta_2}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}$$

$$+ (n-4)\frac{\mathrm{ctg}\theta_3}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} + \cdots$$

$$+ \frac{\mathrm{ctg}\theta_{n-2}}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}. \tag{5}$$

现在考虑微分算子

$$(1-xx')^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2(n-2)(1-xx')\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

的极座标形式

由

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}$$

及(4)得

$$(1-xx')^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2(n-2)(1-xx')\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= (1-\rho^2)^2\left[\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\partial_u^2\right]$$

$$+ 2(n-2)(1-\rho^2)\rho\frac{\partial}{\partial\rho} = (1-\rho^2)^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}$$

$$+ \frac{1-\rho^2}{\rho}[(n-1)+(n-3)\rho^2]\frac{\partial}{\partial\rho}$$

$$+ \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}\partial_u^2 = \frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

$$+ \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}\partial_u^2. \tag{6}$$

我们考虑(6)作用在与 $\theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_{n-1}$ 无关的函数

$\Phi(\rho\cos\theta_1, \rho\sin\theta_1)$ 的情况，得出以下的偏微分方程：

$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi+\frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+(n-2)\mathrm{ctg}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\Phi=0.$$

命 $\xi=\cos\theta_1$，则得

$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi+\frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}$$
$$\times\left[(1-\xi^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-(n-1)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\Phi=0. \qquad (7)$$

这也可以写成为

$$\left[\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right.$$
$$\left.+(1-\xi^2)^{-\frac{n-3}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]\Phi=0. \qquad (8)$$

这建议在长方形

$$0\leqslant\rho\leqslant1,\quad -1\leqslant\xi\leqslant1$$

内研究拟保角变换

$$\begin{cases}u=u(\rho,\xi),\\ v=v(\rho,\xi).\end{cases}$$

这一对函数 u, v 适合于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}(n-3)}\dfrac{\partial v}{\partial\xi},\\ \dfrac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=-(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}.\end{cases} \qquad (9)$$

由 (9) 利用 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\rho}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\xi}$ 消去 v，即得 u 适合于微分方程 (8)。利用 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\rho}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\xi}$ 消去 u，得出 v 所适合的微分方程是：

$$\left[\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right.$$
$$\left.+(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)^{\frac{-1}{2}(n-3)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]v=0.$$

这两个微分方程的二次项相等，一次项两者之和等于

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-3}}\right)+\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n-3)}=2\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}-2\xi\frac{\partial v}{\partial\xi}.$$

(9)式可能是离普通保角变换最相近的拟保角变换.换言之,深入研究这一特殊情况可能作为研究一般拟保角变换的参考.

§7. Poisson 公式

由

$$dydy'=\left(\frac{1-aa'}{1-2ax'+aa'xx'}\right)^2dxdx',$$

可知在球面 $x=u,\ y=v,\ uu'=vv'=1$ 上也有

$$dvdv'=\left(\frac{1-aa'}{1-2au'+aa'uu'}\right)^2dudu'.$$

球面积有以下的关系式

$$\dot{v}=\left(\frac{1-aa'}{1-2au'+aa'}\right)^{n-1}\dot{u}\tag{1}$$

(因为 du 是 $(n-1)$ 维矢量).

这建议有以下的 Poisson 公式

$$\Phi(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-xx'}{1-xu'+xx'}\right)^{n-1}\Phi(u)\dot{u}\tag{2}$$

的可能性，这建议说，如果在单位球面 $uu'=1$ 上给了一个函数 $\Phi(u)$，我们由(2)所定义的函数既在球上适合于(2)，又在球内适合偏微分方程(5.1)．在详细论述这个问题之前，先

研究 Poisson 核

$$P(x,u)=\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1} \tag{3}$$

的性质，命 $x=\rho v$，则

$$P(x,u)=\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\langle u,\ v\rangle+\rho^2}\right)^{n-1},$$

这儿 $\langle u,\ v\rangle$ 表示两个单位矢量 u, v 的夹角.

(1) 当 $0\leqslant\rho<1$ 时，$P(x,\ u)>0$. 这是显然的，因为

$1-2\rho\cos\langle u,\ v\rangle+\rho^2\geqslant 1-2\rho+\rho^2=(1-\rho)^2$.

(2) 我们有

$$\lim_{\rho\to 1}P(x,\ u)=\begin{cases}0, & u\neq v,\\ \infty, & u=v.\end{cases}$$

具体些，命 $\langle u,\ v\rangle=\alpha$，则当 $|\alpha|>\delta$ 时，给任一 ε 可以找到 ρ_0，使 $1>\rho>\rho_0$ 时，

$$P(x,u)\leqslant\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\delta+\rho^2}\right)^{n-1}<\varepsilon.$$

(3) $\dfrac{1}{\omega_{n-1}}\int\underset{u}{\cdots}\int P(x,\ u)\dot{u}=1$,

这可由一目了然的公式

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\underset{v}{\cdots}\int\dot{v}=1$$

经 (1) 而变得.

(4) 当 $\rho<1$ 时，$P(x,\ u)$ 是适合于方程 (5.1) 的.

微分 $P(x,\ u)$ 得

$$\frac{\partial P(x,\ u)}{\partial x_i}=2(n-1)\frac{(1-xx')^{n-2}}{(1-2ux'+xx')^n}$$
$$\times[-2(1-ux')x_i+(1-xx')u_i].$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-xx')^{2-n}\frac{\partial P(x,u)}{\partial x_i}\right] = 2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\times\left[\frac{-2(1-ux')x_i+(1-xx')u_i}{(1-2ux'+xx')^n}\right]$$
$$= 2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{-2(1-ux')+2u_ix_i-2x_iu_i}{(1-2ux'+xx')^n}\right.$$
$$\left.-\frac{n[-2(1-ux')x_i+(1-xx')u_i][-2u_i+2x_i]}{(1-2ux'+xx')^{n+1}}\right\}$$
$$= 2(n-1)\left\{\frac{-2n(1-ux')}{(1-2ux'+xx')^n}\right.$$
$$\left.-\frac{2n[2(1-ux')ux'-2(1-ux')xx'-(1-xx')uu'+(1-xx')ux']}{(1-2ux'+xx')^{n+1}}\right\}$$

由于 $uu'=1$, 故上式等于 0, 即 $P(x, u)$ 适合方程 (5.1).

定理 1 假定 $\Phi(u)$ 是一在 $uu'=1$ 上定义的连续函数, Poisson 公式

$$\Phi(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}\Phi(u)\dot{u}$$

定义一在单位球内适合于方程 (5.1) 的函数,并且

$$\lim_{r\to 1}\Phi(rv)=\Phi(v).$$

证 当 $r<1$ 时, 由于 $P(x, u)$ 适合于方程 (5.1), 因此用积分号下求微分法可知 $\Phi(x)$ 也适合于方程 (5.1).

今往证: 当 $r\to 1$ 时,

$$\Phi(rv)-\Phi(v)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}$$
$$\times(\Phi(u)-\Phi(v))\dot{u}$$

趋于 0.

命 $\cos\alpha=vu'$, 把积分分成为

$$\Phi(rv)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\left(\int\cdots\int_{|\alpha|<\delta}+\int\cdots\int_{|\alpha|<\delta}\right)=s_1+s_2.$$

取 δ 充分小，使

$$|\Phi(u)-\Phi(v)|<\varepsilon,$$

则

$$s_1=O\left(\varepsilon\int_{uu'=1}\cdots\int\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}\dot{u}\right)=O(\varepsilon).$$

对已定的 δ 可取 r 充分接近于1，使

$$\left|\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right|^{n-1}\leqslant\varepsilon.$$

因此

$$s_2=O(\varepsilon).$$

即得所证.

§ 8. 建议了些什么?

以上所讲的至少有三种启发:

1° 是否还有其他的可递群把单位球变为单位球?

2° 从"δ"函数出发(即把 $P(x, u)$ 的性质抽象出来)而研究偏微分方程的 Dirichlet 问题.

3° 从边界上的调和分析出发.

我们现在先回答 1°, 2°. 关于问题三留在第二讲中回答.

1° 变形

$$y=\frac{\sqrt{1-aa'}(x-a)(1+\lambda a'a)}{1-ax'}, \tag{1}$$

这儿 $aa'<1$，而

$$\lambda=\frac{1-\sqrt{1-aa'}}{aa'\sqrt{1-aa'}},\quad 1+\lambda aa'=\frac{1}{\sqrt{1-aa'}}.$$

先证变形 (1) 把单位球变为单位球. 由于

$$yy'=\frac{1-aa'}{(1-ax')^2}(x-a)(I+\lambda a'a)^2(x-a)'$$

$$= \frac{1 - aa'}{(1 - ax')^2}(x - a)\left(I + \frac{1}{1 - aa'}a'a\right)(x - a)'$$

$$= \frac{(1 - aa')(x - a)(x - a)' + [(x - a)a']^2}{(1 - ax')^2},$$

因此

$$1 - yy' = \frac{(1-aa')[(1-2ax'+aa')-(x-a)(x-a)']}{(1 - ax')^2}$$

$$= \frac{(1 - aa')(1 - xx')}{(1 - ax')^2}. \tag{2}$$

不难证明

$$\frac{dy(I - y'y)^{-1}dy'}{1 - yy'} = \frac{dx(I - x'x)^{-1}dx'}{1 - xx'}, \tag{3}$$

即

$$dy(I - y'y)^{-1}dy' = \frac{1 - aa'}{(1 - ax')^2}dx(I - x'x)^{-1}dx'.$$

在单位球上 $x = u$, $y = v$, 由于 $duu' = 0$, 所以得

$$dvdv' = \frac{1 - aa'}{(1 - au')^2}dudu'.$$

因此得出 Poisson 核

$$P(x, u) = \frac{(1 - xx')^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1 - ux')^{n-1}}. \tag{4}$$

$P(x, u)$所适合的微分方程是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = c. \tag{5}$$

因而证明: Poisson 公式

$$\Phi(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1} \frac{(1 - xx')^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1 - ux')^{n-1}}\varphi(u)\dot{u}. \tag{6}$$

给出偏微分方程(5)的 Dirichlet 问题的解(证明唯一性后便完全解决了 Dirichlet 问题).

2° 不从群出发,而仅从“Ponisson 核”出发,也有可能性.

命 $\mathscr{D}$ 是一域，$\mathscr{L}$ 是它的边界，如果我们可以找到一个函数

$$P(x, u),$$

x 在域 $\mathscr{D}$ 里变，u 在边界 $\mathscr{L}$ 上变，而且适合以下的一些性质：

(i) $P(x, u) > 0$,

(ii) $\int_{\mathscr{L}} P(x, u)\dot{u} = 1$,

(iii) 当 x 趋于边界点 v 时，

$$\lim_{x \to v} P(x, u) = \begin{cases} 0, & 若 \quad u \neq v, \\ \infty, & 若 \quad u = v. \end{cases}$$

(iv) 它适合一个线性算子(不一定是微分算子)

$$\partial \Phi = 0, \qquad \text{(A)}$$

则我们可以希望由

$$\Phi(x) = \int_{\mathscr{L}} P(x, u)\Phi(u)\dot{u}$$

来给出方程 (A) 的 Dirichlet 问题的解答来，例如在单位球内

$$\frac{1 - xx'}{(1 - 2ux' + xx')^{n/2}}$$

也具有以下的一些性质：

(1) 非负性，

(2), (3) “δ” 函数性，

(4) 它适合于普通的 Laplace 方程

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0.$$

因此 Poisson 积分

$$\Phi(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int \cdots \int_{uu'=1} \frac{1 - xx'}{(1 - 2ux' + xx')^{n/2}} \Phi(u)\dot{u}$$

也自然地给出了单位球内的 Dirichlet 问题的解。

以上的性质中较难证明的只有两点：

(i) $\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\frac{1-xx'}{(1-2ux'+xx')^{n/2}}\dot{u}=1,$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{1-xx'}{(1-2ux'+xx')^{n/2}}\right]=0.$

附记 在《典型域的调和分析》一书中出现了更多更复杂的类型的“δ 函数”.

§9. 对 称 原 理

对称原理的重要根据之一是：二维的 Laplace 方程

$$\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\Phi=0$$

经反演而不变，即命

$$\tau=\frac{1}{\rho},$$

则

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}=-\tau\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

但当 $n\geqslant 3$ 时，这一性质不再成立.

Laplace 方程

$$\frac{1}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\partial_u^2=\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(n-1)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\partial_u^2$$

变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho^{n-2}}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho^{n-2}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\partial_u^2\\&=\tau^{n-2}\left(\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{1}{\tau^{n-2}}\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)+\partial_u^2\\&=\tau^{n-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau^{-n+3}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)+\partial_u^2=\tau^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\\&\quad-(n-3)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\partial_u^2,\end{aligned}$$

也就是 Laplace 方程经反演而变了． 幸而有，如果把被微分函数 Φ 改为 $\tau^{n-2}\Psi$，则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=\tau^{n-2}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}+(n-2)\tau^{n-3}\Psi,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=\tau^{n-2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+2(n-2)\tau^{n-3}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}$$
$$+(n-2)(n-3)\tau^{n-4}\Psi.$$

因而

$$\left[\tau^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-(n-3)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\partial_u^2\right]\Phi$$
$$=\tau^{n-2}\left[\tau^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+(n-1)\tau\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right]+\tau^{n-2}\partial_u^2\Psi,$$

即 Laplace 方程如果变数 x 和函数 Φ 都经过变化

$$y=\frac{x}{xx'},\quad \Psi(y)=(xx')^{\frac{n}{2}-1}\Phi(x)$$

则也不变.

换言之，在研究 n 维 Laplace 方程的对称原理时，必须注意：变数 x 与函数 Φ 都要经过变换，但对我们所研究的微分方程

$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}\partial_u^2\Phi=0$$

来说，它经 $\rho=\dfrac{1}{\tau}$ 而不变的，因而可如两个变数的办法直接推广.

§ 10. Laplace 方程的不变性

Laplace 方程虽然经过

$$y=\frac{(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a}{1-2ax'+aa'xx'}\ (aa'<1)\quad(1)$$

而改变，但是如果被微分的函数也相应地发生变化，我们也可以找出另一些不变性，就是如果自变数照 (1) 变化，而函数照

$$Y=\left(\frac{1-2ax'+aa'xx'}{1-aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1}X \tag{2}$$

变化，我们有

$$(1-xx')^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}=(1-yy')^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}. \tag{3}$$

在证明此式之前，先直接验算以下的 $n+1$ 个函数适合 Laplace 方程：

$$\Phi(x)=(1-2ax'+aa'xx')^{1-\frac{n}{2}} \tag{4}$$

及

$$\Psi(x)=(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}[(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a] \tag{5}$$

((5) 是一矢量，共有 n 个函数)。

先证 $\Phi(x)$ 是调和函数：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=2\left(1-\frac{n}{2}\right)(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}(aa'x_i-a_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=4\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}\right)(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}(aa'x_i-a_i)^2+2\left(1-\frac{n}{2}\right)(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times naa'=0.$$

再证 $\Psi(x)$ 是调和函数：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=-n(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}(aa'x_i-a_i)$$

$$\times[(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a]$$

$$+(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}[(1-aa')e_i-2(x_i-a_i)a],$$

这儿 $e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，第 i 支量为 1，其他为 0. 又

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2}=n(n+2)(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-2}$$

$$\times(aa'x_i-a_i)^2[(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a]$$

$$-n(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}aa'[(1-aa')(x-a)$$

$$-(x-a)(x-a)'a]-2n(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\times(aa'x_i-a_i)[(1-aa')e_i-2(x_i-a_i)a]$$

$$+(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}(-2a).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2}=n(n+2)(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\times aa'[(1-aa')(x-a)-(x-a)(x-a)'a]$$

$$-n^2(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}aa'[(1-aa')(x-a)$$

$$-(x-a)(x-a')a]-2n(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\times[aa'(1-aa')x-(1-aa')a-2aa'(xx'-ax)a$$

$$+2(ax'-aa')a]-2n(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}}a=0.$$

现在来证明 (3) 式，先求

$$X=\Phi(x)Y(1-aa')^{\frac{n}{2}-1}$$

的偏微商：

$$(1-aa')^{1-\frac{n}{2}}\frac{\partial X}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Phi(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}Y,$$

$$(1-aa')^{1-\frac{n}{2}}\frac{\partial^2X}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2Y}{\partial y_j\partial y_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Phi(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial^2y_j}{\partial x_i^2}\Phi(x)+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y.$$

$$(1-aa')^{1-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_j\partial y_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Phi(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\Phi(x)+2\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_j\partial y_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Phi(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial y_j}$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi_j(x)}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}y_j\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}Y,$$

其后二项都等于 0.

又由

$$dydy'=\frac{(1-aa')^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}dxdx',$$

推得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{(1-aa')^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\delta_{jk},$$

乘以 $\dfrac{\partial x_k}{\partial y_l}$ 对 k 加之,得

$$\frac{(1-aa')^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x_k}{\partial y_l}=\frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{(1-aa')^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

$$=\frac{(1-aa')^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\delta_{jk}.$$

由 (6) 推出

$$(1-aa')^{1-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}=\frac{(1-aa')^2\Phi(x)}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}$$

$$=(1-aa')^2(1-2ax'+aa'xx')^{-\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2},\qquad(7)$$

师

利用关系

$$1-xx'=(1-2ax'+aa'xx')(1-yy')/(1-aa')$$

可得

$$(1-xx')^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}=(1-yy')^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}.$$

附记

(1) 实质上对所有的 Möbius 变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=1$$

都有

$$dw=\frac{dz}{(cz+d)^2},$$

因此

$$dwd\bar{w}=\frac{dzd\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

及

$$\partial w\partial\bar{w}\Phi=|cz+d|^4\partial z\partial\bar{z}\Phi,$$

即可望得出更一般的结果. 由于 Möbius 变换的实形式的 n 维推广是共形变换，也就是球几何！

(2) 对称原理最简单的形式是把 R_1（图 1）中的调和函数（在实数轴上的条件略）可以扩展到 R_2. 而直线与任何圆等价，所以一般的形式是任何一段圆弧都有此对应的结果. 推广到 n 维，任何一个球的任何一片都可应用对称原理解析

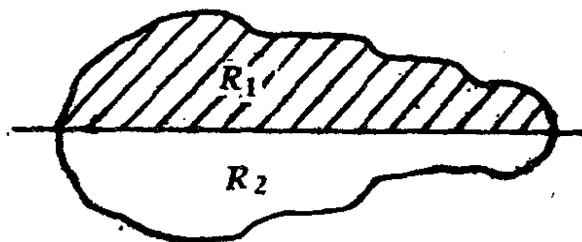


图 1

扩展出去.

§5中微分方程(1)经反演

$$y=\frac{x}{xx'}$$

而不变,对称原理获得自然推广. 用第三讲§6中的结果将获得更普遍的形式.

§11. Laplace 方程的均值公式

定理1 如果 $\Phi(x)=\Phi(\rho u)$ 是在单位球上 $xx'\leqslant 1$ 适合于 Laplace 方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\partial_u^2\Phi=0, \quad (1)$$

而且有二阶连续偏微商的函数,则当 $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 时

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{uu'=1}\cdots\int\Phi(\rho u)\dot{u}=\Phi(0). \quad (2)$$

命

$$F(\rho)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{uu'=1}\cdots\int\Phi(\rho u)\dot{u}$$

积分号下求微分,并由(1)可知

$$\frac{1}{\rho^{n-3}}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{dF}{d\rho}\right)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{uu'=1}\cdots\int\frac{1}{\rho^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\rho}$$
$$\times\left(\rho^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)\dot{u}=-\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{uu'=1}\cdots\int\partial_u^2\Phi\dot{u}.$$

由

$$\partial_u^2=\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{p-1}}\frac{\partial^2}{\partial\theta_p^2}+(n-p-1)\right.$$
$$\left.\times\frac{\operatorname{ctg}\theta_p}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{p-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right)$$
$$=\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{p-1}}\cdot\frac{1}{\sin^{n-p-1}\theta_p}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left(\sin^{n-p-1}\theta_p\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right)$$

及

$$\dot{u}=\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin^{n-p-1}\theta_p\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\cdots d\theta_{n-1},$$

可知

$$\int\cdots\int_{uu'=1}\partial_u^2\Phi(\rho u)\dot{u}=\sum_{p=1}^{n-1}J_p,$$

此处

$$J_p=\int\cdots\int_{uu'=1}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left(\sin^{n-p-1}\theta_p\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_p}\right)\times\frac{\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{p-1}\sin^{n-p-1}\theta_p}.$$

J_p 是一个 $(n-1)$ 重积分，其中第 $p(p<n-1)$ 重积分是

$$\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left(\sin^{n-p-1}\theta_p\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_p}\right)d\theta_p=\sin^{n-p-1}\theta_p\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_p}\Big|_0^\pi=0.$$

因此当 $p<n-1$ 时，$J_p=0$，当 $p=n-1$ 时，J_p 中第 $(n-1)$ 重积分是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_{n-1}^2}d\theta_{n-1}=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{n-1}}\Big|_0^{2\pi}=0,$$

这儿用了另外一个性质，Φ 对 θ_{n-1} 的周期性，因此 $J_{n-1}=0$.

总之

$$\int\cdots\int_{uu'=1}\partial_u^2\Phi\dot{u}=0,$$

因而

$$\frac{1}{\rho^{n-3}}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{dF}{d\rho}\right)=0,$$

推得

$$\rho^{n-1}\frac{dF}{d\rho}=k$$

为常数，当 $\rho=0$ 时可见 $k=0$，因此 F 是一常数，再取 $\rho=0$，得出公式(2).

§ 12. Laplace 方程的 Poisson 公式

回到§ 10，命

$$Y(y)=\left(\frac{1-2ax'+aa'xx'}{1-aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1}X(x)$$

如果 $Y(y)$ 适合于 Laplace 方程，则 $X(x)$ 也对．对 $Y(y)$ 用均值公式

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}Y(v)\dot{v}=Y(0).$$

由于

$$Y(0)=\left(\frac{1-2aa'+(aa')^2}{1-aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1}X(a)=(1-aa')^{\frac{n}{2}-1}X(a),$$

$$Y(v)=\left(\frac{1-2au'+aa'}{1-aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1}X(u)$$

及

$$\dot{v}=\left(\frac{1-aa'}{1-2au'+aa'}\right)^{n-1}\dot{u},$$

因此得出

$$(1-aa')^{\frac{n}{2}-1}X(a)=Y(0)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}Y(v)\dot{v}$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}X(u)\left(\frac{1-2au'+aa'}{1-aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times\left(\frac{1-aa'}{1-2au'+aa'}\right)^{n-1}\dot{u}.$$

于是得到 Laplace 方程的 Poisson 公式

$$X(a)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\frac{1-aa'}{(1-2au'+aa')^{n/2}}X(u)\dot{u}. \tag{1}$$

这给出了 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解的唯一性．

§13. 小　结

从单位圆出发，直接推广到单位球

$$xx'<1. \tag{1}$$

这单位球的边界是

$$uu' = 1. \tag{2}$$

单位球的表面积元素以 $\dot{u}$ 表之，总表面积 $\int \cdots \int_{uu'=1} \dot{u} = \omega_{n-1}$.

本讲中提出以下几种看法：

（1）从单位圆的实形式出发.

变换群：由把 $x = a$ 变为 $y = 0$ 的变换

$$y = \frac{(1 - aa')(x - a) - (x - a)(x - a)'a}{1 - 2ax' + aa'xx'}, \quad aa' < 1 \tag{3}$$

及使 0 点不变的变换

$$y = x\Gamma, \quad \Gamma\Gamma' = I \tag{4}$$

所组成. 由此推出

$$1 - yy' = \frac{(1 - aa')(1 - xx')}{1 - 2ax' + aa'xx'}. \tag{5}$$

这显示出把（1）变为其自己. 微分不变量是

$$\frac{dydy'}{(1 - yy')^2} = \frac{dxdx'}{(1 - xx')^2}. \tag{6}$$

二阶偏微分不变算子是

$$(1 - yy')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left((1 - yy')^{2-n} \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)$$

$$= (1 - xx')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1 - xx')^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

因而有二阶偏微分方程式

$$(1 - xx')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1 - xx')^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{7}$$

变换（3）、（4）也使（2）不变，在（2）上体积元素的变化规律是

$$\dot{v} = \left(\frac{1 - aa'}{1 - 2au' + aa'}\right)^{n-1} \dot{u}, \tag{8}$$

这儿得出了 Poisson 核,由此可有 Poisson 公式

$$\Phi(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}\Phi(u)\dot{u} \qquad (9)$$

来解决 (7) 式的边界值问题 (Dirichlet 问题)。

(2) 从实射影群出发

变换群由把 $x=a$ 变为 $y=0$ 的变换

$$y=\frac{\sqrt{1-aa'}(x-a)(I+\lambda a'a)}{1-ax'},$$

$$\lambda=\frac{1-\sqrt{1-aa'}}{aa'\sqrt{1-aa'}} \qquad (3')$$

及使 0 点不变的变换

$$y=x\Gamma,\quad \Gamma\Gamma'=I \qquad (4')$$

所组成. 由此推出

$$1-yy'=\frac{(1-aa')(1-xx')}{(1-ax')^2}. \qquad (5')$$

微分不变量是

$$\frac{dy(I-y'y)^{-1}dy'}{1-yy'}=\frac{dx(I-x'x)^{-1}dx'}{1-xx'}. \qquad (6')$$

由不变二阶偏微分算子所得出的方程是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}-\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}-2\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0. \qquad (7')$$

在 (2) 上体积函数的变化规律是

$$\dot{v}=\frac{(1-aa')^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1-au')^{n-1}}\dot{u}. \qquad (8')$$

因此解决 (7′) 的边界值问题的 Poisson 公式是

$$\Phi(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\frac{(1-xx')^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1-xu')^{n-1}}\varphi(u)\dot{u}. \qquad (9')$$

(3) 在 (1) 中所讨论的几何学为第三讲的球几何共形映

照作了准备．而在（2）中所讨论的几何学则为混合型偏微分方程作准备．（7′）的二次型是

$$I - x'x.$$

当 $xx' < 1$ 时，这方阵是定正的；而 $xx' > 1$ 时，它是一负（$n-1$）正的．由于（2）的变形是一次的，因此在反演下不是不变的．

（4）Laplace 算子虽然经过（3）而改变，但如果考虑其被作用的函数也变化，我们仍能得出共变形式：当 x，y 经过（3）变化时，我们有

$$Y = \left(\frac{1 - 2ax' + aa'xx'}{1 - aa'}\right)^{\frac{n}{2}-1} X, \tag{10}$$

则

$$(1 - xx')^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} = (1 - yy')^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}. \tag{7''}$$

§ 12 中给出了 Laplace 方程的 Poisson 公式

$$X(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{uu'=1} \cdots \int \frac{1 - xx'}{(1 - 2xu' + xx')^{\frac{n}{2}}} X(u)\dot{u}.$$

（5）单位圆推广到单位球是开始的第一步．关于部分的发展可以参阅作者：《多复变函数论中典型域的调和分析》．

第二讲　Fourier 分析与调和函数的展开式

§1．超球函数的一些性质

为了便于了解起见，我们从头起叙述超球多项式的一些性质：

当 $\lambda > -\frac{1}{2}$ 时，超球多项式由

$$P_m^{(\lambda)}(\xi) = \sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}m} (-1)^l \frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l)!}(2\xi)^{m-2l} \quad (1)$$

来定义，它是一 m 次的多项式，有时还定义 $P_{-1}^{(\lambda)}(\xi)=0$．不难算出：

$$P_0^{(\lambda)}(\xi)=1,\quad P_1^{(\lambda)}(\xi)=2\lambda\xi,$$

$$P_2^{(\lambda)}(\xi)=2\lambda(\lambda+1)\xi^2-\lambda,$$

$$P_3^{(\lambda)}(\xi)=\frac{4}{3}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\xi^3-2\lambda(\lambda+1)\xi,\cdots.$$

一般可以从递归公式

$$mP_m^{(\lambda)}(\xi)=2(m+\lambda-1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi) - (m+2\lambda-2)P_{m-2}^{(\lambda)}(\xi) \quad (2)$$

逐一推出，(2) 式右边等于

$$(m+\lambda-1)\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^l\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-1-2l)!}(2\xi)^{m-2l}$$

$$-(m+2\lambda-2)\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(m-2)}(-1)^l\frac{\Gamma(m-2-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2-2l)!}$$

$$\times(2\xi)^{m-2l-2}=\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}m}(-1)^l\left[\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)(m+\lambda-1)}{\Gamma(\lambda)l!(m-1-2l)!}\right.$$

$$- \frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)(m+2\lambda-2)}{\Gamma(\lambda)(l-1)!(m-2l)!}(2\xi)^{m-2l}$$

$$= \sum_{0\leqslant l\leqslant \frac{1}{2}m} (-1)^l \frac{\Gamma(m-1-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l)!}$$

$$\times [(m+\lambda-1)(m-2l)-(m+2\lambda-2)l](2\xi)^{m-2l}$$

$$= m \sum_{0\leqslant l\leqslant \frac{1}{2}m} (-1)^l \frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l)!}(2\xi)^{m-2l}.$$

即得所证.

从递归公式 (2), 用归纳法立刻证得

$$\sum_{m=0}^{n}(\lambda+m)P_m^{(\lambda)}(\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(\xi)-(n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(\xi)}{1-\xi}. \tag{3}$$

乘 (2) 式以 ρ^{m-1}, 而对 m 相加, 得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\rho^{m-1}P_m^{(\lambda)}(\xi) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+\lambda-1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi)\rho^{m-1}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty}(m+2\lambda-2)P_{m-2}^{(\lambda)}(\xi)\rho^{m-1}.$$

命

$$h(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(\xi)\rho^m,$$

则此式可以写成为

$$h'(\rho) = 2\xi\rho^{1-\lambda}[\rho^{\lambda}h(\rho)]' - \rho^{2-2\lambda}[\rho^{2\lambda}h(\rho)]'$$

$$= 2\xi[\lambda h(\rho) + \rho h'(\rho)] - [2\lambda\rho h(\rho) + \rho^2 h'(\rho)],$$

或

$$\frac{h'(\rho)}{h(\rho)} = 2\lambda(\xi-\rho)/(1-2\xi\rho+\rho^2).$$

运用 $h(0) = P_0^{(\lambda)}(\xi) = 1$, 积分此式立得

$$h(\rho) = (1-2\xi\rho+\rho^2)^{-\lambda}.$$

也就是我们有演出函数

$$(1-2\xi\rho+\rho^2)^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\lambda)}(\xi)\rho^m. \tag{4}$$

微分公式（1）得

$$\frac{d}{d\xi}P_m^{(\lambda)}(\xi)=2\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^l\frac{\Gamma(m-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(m-2l-1)!}$$

$$\times(2\xi)^{m-1-2l}=2\lambda\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^l$$

$$\times\frac{\Gamma(m-1-l+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)l!(m-1-2l)!}(2\xi)^{m-1-2l}.$$

故得微分递归公式:

$$\frac{d}{d\xi}P_m^{(\lambda)}(\xi)=2\lambda P_{m-1}^{(\lambda+1)}(\xi). \tag{5}$$

也不难证明:

$$(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_m^{(\lambda)}(\xi)-(2\lambda+1)\xi\frac{d}{d\xi}P_m^{(\lambda)}(\xi)$$

$$+m(m+2\lambda)P_m^{(\lambda)}(\xi)=0.$$

如命

$$\eta=(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_m^{(\lambda)}(\xi), \tag{6}$$

则 η 适合于微分方程

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(2\lambda-3)\xi\frac{d\eta}{d\xi}$$

$$+(m+1)(m+2\lambda-1)\eta=0. \tag{7}$$

今往证明 Rodrique 公式:

$$(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_m^{(\lambda)}(\xi)=\frac{(-2)^m}{m!}\frac{\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}$$

$$\times\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

在证明此公式之前，先由（1）推得恒等式

$$mP_m^{(\lambda)}(\xi) = (m + 2\lambda - 1)\xi P_{m-1}^{(\lambda)}(\xi)$$
$$- 2\lambda(1 - \xi^2)P_{m-2}^{(\lambda+1)}(\xi), \tag{9}$$

再行归纳法，此式之右边等于

$$(m + 2\lambda - 1)\xi(1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{(-2)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m - 1 + \lambda)}{\Gamma(\lambda)}$$
$$\times \frac{\Gamma(m - 1 + 2\lambda)}{\Gamma(2m + 2\lambda - 2)} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{3}{2}}$$
$$- 2\lambda(1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{(-2)^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\Gamma(m - 1 + \lambda)}{\Gamma(\lambda + 1)}$$
$$\times \frac{\Gamma(m + 2\lambda)}{\Gamma(2m + 2\lambda - 2)} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-2} (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m - 1 + \lambda)\Gamma(m + 2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m + 2\lambda - 2)} (1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}$$
$$\times \left[\xi \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{3}{2}}\right.$$
$$\left. + (m - 1)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-2} (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m - 1 + \lambda)\Gamma(m + 2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m + 2\lambda - 2)} (1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}$$
$$\times \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} \left\{(1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{3}{2}}\xi\right\} \text{（由 Leibnitz 公式）}$$
$$= \frac{(-2)^{m-1}\Gamma(m - 1 + \lambda)\Gamma(m + 2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m + 2\lambda - 2)} \left(\frac{-1}{2m + 2\lambda - 1}\right)$$
$$\times (1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-(-2)^{m-1}\Gamma(m - 1 + \lambda)\Gamma(m + 2\lambda)(2m + 2\lambda - 2)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda-2)\cdot(2m+2\lambda-2)(2m+2\lambda-1)}$$
$$\times (1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1 - \xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{(-2)^m\Gamma(m + \lambda)\Gamma(m + 2\lambda)}{(m-1)!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m + 2\lambda)} (1 - \xi^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}.$$

§2. 正 交 性 质

假定$f(\xi)$是一个在$[-1,+1]$之间有m次连续微商的函数，由 Rodrique 公式可知

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)P_{m}^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^{2})^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi$$

$$=\frac{(-2)^{m}\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}$$

$$\times(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi. \tag{1}$$

用部分积分可知

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi$$

$$=f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.$$

由于$\lambda>-\frac{1}{2}$，所以

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0.$$

因此得出

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi$$

$$=-\int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^{2})^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.$$

续行此法，最后得出

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)P_{m}^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^{2})^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi=\frac{2^{m}\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi) d\xi. \tag{2}$$

如果 $f(\xi)$ 是一 m 次多项式，其最高方次的系数等于 a，则得

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}$$

$$\times a \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi$$

$$= \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)\Gamma(m+\lambda+1)} a$$

$$= \frac{2^{-m-2\lambda+1}\pi\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(m+\lambda+1)} a, \tag{3}$$

此处用了公式

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x).$$

特别取 $f(\xi) = P_l^{(\lambda)}(\xi)$，由 (1.1) 可知

$$a = \begin{cases} 0, & \text{若} \quad l < m, \\ 2^m \dfrac{\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(\lambda) m!}, & \text{若} \quad l = m, \end{cases}$$

则得

$$\int_{-1}^{1} P_l^{(\lambda)}(\xi) P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{若} \quad l \neq m, \\ \dfrac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(m+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2(m+\lambda)\Gamma(m+1)}, & \text{若} \quad l = m. \end{cases} \tag{4}$$

这是超球函数的正交性质.

再在 (2) 式中取 $f(\xi) = \xi^l$，则当 $l \geqslant m$ 时，

$$\int_{-1}^{1} \xi^l P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi = \binom{l}{m}$$

$$\times \frac{2^m \Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{1} \xi^{l-m}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi. \tag{5}$$

当 $l-m$ 是奇数时，这积分等于 0，若 $l-m=2k$ 是偶数时，则由

$$\int_{-1}^{1}\xi^{l-m}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+m+\lambda+1)},$$

得出

$$\int_{-1}^{1}\xi^{l}P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若}\quad l<m \text{ 或 } l-m \text{ 的奇数,}\\ \dfrac{\pi}{2^{l+2k-1}}\dfrac{l!}{k!(l-2k)!}\dfrac{\Gamma(l-2k+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(l-k+\lambda+1)}, & \text{若}\quad l-m=2k.\end{cases}\tag{6}$$

由于 $P_l^{(\lambda)}(\xi)$ 是一 l 次多项式，因此任一 m 次多项式可以表成为

$$f(\xi)=\sum_{l=0}^{m}a_lP_l^{(\lambda)}(\xi).\tag{7}$$

乘以 $P_l^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$，并由 -1 到 $+1$ 求积分，得

$$a_l=2^{2\lambda-1}\frac{(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)\Gamma(l+1)}{\pi\Gamma(l+2\lambda)}\times\int_{-1}^{1}f(\xi)P_l^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.\tag{8}$$

由此立即推出

定理 1 一 m 次多项式 $f(\xi)$ 的 a_l $(0\leqslant l<m-1)$ 都等于 0，则与 $P_m^{(\lambda)}(\xi)$ 相差一常数因子.

联合 (6)、(7)、(8) 得展开式

$$\xi^m=\frac{m!\Gamma(\lambda)}{2^m}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}m}\frac{m-2k+\lambda}{k!\Gamma(m-k+\lambda+1)}P_{m-2k}^{(\lambda)}(\xi).\tag{9}$$

根据此式今证明恒等式:

当 $v > \lambda > -\frac{1}{2}$ 时，有

$$P_m^{(v)}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(v)} \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}m} c_k P_{m-2k}^{(\lambda)}(\xi), \tag{10}$$

此处

$$c_k = \frac{m-2k+\lambda}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+v-\lambda)}{\Gamma(v-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(m+v-k)}{\Gamma(m+\lambda+1-k)}. \tag{11}$$

在证明此式之前，先叙述有关 Γ 函数的差分公式，定义 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一级差分，$\Delta^q f(x) = \Delta^{q-1}[\Delta f(x)]$ 是 $f(x)$ 的 q 阶差分，不难证明

$$\Delta^q f(x) = \sum_{l=0}^{q} (-1)^l \binom{q}{l} f(x+q-l).$$

由于

$$\Delta \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = \frac{\Gamma(\alpha+x+1)}{\Gamma(\beta+x+1)} - \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}$$

$$= (\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+1)},$$

因此当 $\alpha > \beta$ 时

$$\Delta^q \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-q+1)} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+q)}. \tag{12}$$

现在来证明 (11) 式. 由 (1.1) 及 (9) 可知

$$P_m^{(v)}(\xi) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}m} (-1)^s \frac{\Gamma(v+m-s)}{\Gamma(v)\Gamma(s+1)\Gamma(m-2s+1)} (2\xi)^{m-2s}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(v)} \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}m} (-1)^s \frac{\Gamma(v+m-s)}{\Gamma(s+1)} \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}-s}$$

$$\times \frac{m-2s-2k+\lambda}{k!\,\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)} P_{m-2k-2s}^{(\lambda)}(\xi)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(v)} \sum_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}m} c_t P_{m-2t}^{(\lambda)}(\xi),$$

这儿

$$c_t = \sum_{s+k=t} (-1)^s \frac{\Gamma(v+m-s)(m-2s-2k+\lambda)}{s!k!\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)}$$

$$= \frac{m-2t+\lambda}{t!} \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \frac{\Gamma(v+m-s)}{\Gamma(m-t-s+\lambda+1)}$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)\Gamma(t+v-\lambda)\Gamma(v+m-t)}{t!\Gamma(v-\lambda)\Gamma(m-t+\lambda+1)}.$$

§3. 边界值问题

还是从单位圆谈起：如果在圆周上有一 Fourier 级数

$$f(e^{i\theta}) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta,\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos n\theta d\theta, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin n\theta d\theta, \end{cases} \tag{2}$$

则函数

$$f(\rho e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n \tag{3}$$

是以 (1) 为边界值的调和函数．要看出这点是十分容易的．首先，因为 $\rho^n \cos n\theta$，$\rho^n \sin n\theta$ 是以 $\cos n\theta$，$\sin n\theta$ 为边界值的调和函数，而 Laplace 方程是线性的．因此，可以如此希望，这也是在某种条件下所证明了的事实．

我们现在的目的是：把这种想法推到单位球上．但先指出，把 (2) 代入 (3) 得

$$f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\psi})d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) \times (\cos n\psi \cos n\theta + \sin n\psi \sin n\theta)d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\cos n(\theta-\phi)d\phi \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\phi)\right)d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}d\phi, \quad (5)$$

这样又得出 Poisson 公式.

从(4)建议，我们能否把球内的任一调和函数 $f(\rho u)$ 表为

$$f(\rho u) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1} f(v)\Phi_n(u,v)\dot{v} \quad (6)$$

的形式，如果可以，则可以希望 $f(\rho u)$ 是以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1} f(v)\Phi_n(u,v)\dot{v} \quad (7)$$

为边界值的调和函数.本来应当从单位球上的调和分析出发，先找出球面上的正交完整系，然后再研究(6)，但这条途径较长，而且还要用到一定的群表示的知识，我们现在取一条相反的但较方便的途径：先把 Poisson 核展开然后再涉及其他.

Laplace 方程的 Poisson 核有以下的展开式：由(1.4)、(2.10)、(2.11)可知：当 $x=\rho v$, $vv'=1$ 时,

$$\frac{1-xx'}{(1-2xu'+xx')^{n/2}} = (1-\rho^2)\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\frac{n}{2})}(uv')\rho^m$$

$$= (1-\rho^2)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}m} c_k P_{m-2k}^{(\frac{n}{2}-1)}(uv')\rho^m,$$

此处 $c_k = m-2k+\frac{1}{2}n-1$. 换变数，命 $l=m-2k$, 则得

$$\frac{1-xx'}{(1-2xu'+xx')^{n/2}}=(1-\rho^2)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n-1}$$

$$\times P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')\rho^l\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv').$$

因此 Poisson 积分公式可以写成为

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\frac{(1-\rho^2)f(v)}{(1-2\rho\cos uv'+\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\dot{v}$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}.$$

由此建议：在球面上给了一个函数 $f(v)$，它有展开式

$$f(u)\sim\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v},\quad(8)$$

则可望有一调和函数

$$f(\rho u)\sim\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}\qquad(9)$$

以 $f(u)$ 为边界值.

展式(8)称为 Laplace 级数，它是 Fourier 级数的自然推广，超球函数 $P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(\xi)$ 也特别命名为 Legendre 函数或 Legendre 多项式.

关于(8)式的收敛求和问题今不深论(参考陈建功：直交函数论，科学出版社出版). 但可以说明的是如果(8)式收敛，可以保证(9)式收敛，但反之，(9)式收敛恰不能保证(8)式收敛，甚至不能保证它在边界上定义一个函数.

与§1.7证明定理1所用的方法相同,可以证明:

如果 $f(v)$ 是连续函数,则

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}$$
$$\times (uv')f(v)\dot{v}=f(u). \qquad (10)$$

这儿建议,有“Abelian”定理与“Tauberian”定理,也就是如果

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{N}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')f(v)\dot{v}=s_0, \qquad (11)$$

是否有

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')f(v)\dot{v}=s_0. \qquad (12)$$

这就是普通幂级数的 Abelian 定理,当然正确.

反之,如果(12)式成立而且

$$\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')f(v)\dot{v}=O\left(\frac{1}{l^2}\right),$$

则(11)式也成立.

§4. 球面上的广义函数

现在指出球面上定义广义函数的一个方法.在边界上(即球面上)给了一个连续函数,我们有一个球内的调和函数以之为边界值,反之,一个球内无处不调和的函数的边界函数不一定连续,甚至于可能不成其为函数.但我们可以抽象地定义:球上的一个广义函数可以理解为球内一个调和函数的边界值.

具体地说:如果有一展开式

$$f(\rho u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(uv')f(v)\dot{v}, \qquad (1)$$

而

$$\lim_{l\to\infty}\left|\int\cdots\int_{vv'=1} P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}\right|^{-\frac{1}{l}} \leqslant 1,$$

则级数（1）在单位球内收敛,而且定义一调和函数.

形式 Laplace 级数

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{vv'=1} P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}$$

作为一个广义函数的定义.

即以圆而论,这样定义的广义函数的范围就比 L. Schwartz 所定义的广义函数的范围为宽,而且处理起来也比较方便.

§5. 球面上的调和分析

Laplace 级数不是 Fourier 级数的最确切的推广. 因为它并没有根据球面上的完整正交系出发.

命 γ 表示 n 维空间的单位超球面,即 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 适合于

$$uu'=1 \tag{1}$$

的矢量 u 所成的图形. 超球面 $\mathfrak{z}$ 有球座标表示

$$\begin{cases} u_1 = \cos\theta_1, \\ u_2 = \sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ u_n = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{cases} \tag{2}$$

这儿

$$0\leqslant\theta_r\leqslant\pi\ (1\leqslant r\leqslant n-2),\ 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi. \tag{3}$$

超球面的表面积元素是

$$\dot{u} = \sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}. \tag{4}$$

总面积等于

$$\omega=\omega_{n-1}=\int\cdots\int_{uu'=1}\dot{u}=\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1\cdots$$

$$\cdots\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}. \tag{5}$$

超球面上的调和分析的主要目的是：找出一组函数

$$\varphi_i(u)=\varphi_i(u_1,\cdots,u_n),\quad i=0,1,2,\cdots\cdots$$

在 γ 上正交就范，即

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\varphi_i(u)\varphi_j(u)\dot{u}=\delta_{ij},$$

而且"任一函数" $f(u)$ 可以由 $\varphi_i(u)$ 的线性组合逼近它，即给了任一 $\varepsilon>0$，有 $c_0,\cdots,c_n$ 使

$$\left|f(u)-\sum_{i=0}^{M}c_i\varphi_i\right|<\varepsilon.$$

并且定义

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_i\varphi_i(u),\quad c_i=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}f(v)\varphi_i(v)\dot{v}$$

是函数 $f(u)$ 的 Fourier 级数.

具体地给出 $\varphi_i(u)$ 才是 Fourier 级数的最好推广. 但要达到这目的必需要较多的预备知识(详见典型域的调和分析，第七章，§ 7.2). 而 Laplace 级数仅是把一个不可约表示的支量不加区别地加在一起的情况而已. 也就是 Laplace 级数中的 $P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')$ 是从

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_i\varphi_i(u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=0}^{\infty}\int\cdots\int_{vv'=1}f(v)\varphi_i(u)\varphi_i(v)\dot{v}$$

中若干个 $\varphi_i(u)\varphi_i(v)$ 加在一起而得来的.

§ 6. 不变方程的 Poisson 核的展开

再看

$$\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}$$

的展开式. 命 $x=\rho v, vv'=1$, 由(1.4)、(2.10)、(2.11)推得

$$\left(\frac{1-xx'}{1-2xu'+xx'}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}$$

$$=(1-\rho^2)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(n-1)}(uv')\rho^m$$

$$=(1-\rho^2)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}\sum_{0<k<\frac{1}{2}m}c_kP_{m-2k}^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')\rho^m$$

$$=(1-\rho^2)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\phi_l(\rho)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv'),\quad(1)$$

这儿

$$\phi_l(\rho)=\rho^l\sum_{k=0}^{\infty}c_k\rho^{2k}$$

$$=\rho^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l+\frac{1}{2}n-1}{k!}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{\Gamma(l+k+n-1)}{\Gamma\left(l+k+\frac{1}{2}n\right)}\rho^{2k}$$

$$=\rho^l\frac{\Gamma(l+n-1)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)}F\left(\frac{1}{2}n,\ l+n-1;\ l+\frac{1}{2}n;\ \rho^2\right),$$

其中 $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ 是超几何级数.

由超几何级数的性质:

$$F(\alpha;\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\gamma,\alpha-\beta;\gamma;x)$$

及当 $\alpha+\beta-\gamma<0$ 时,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\alpha-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

可得

$$\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n-1)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)}\rho^l F\left(l,-\frac{1}{2}n+1;l+\frac{1}{2}n;\rho^2\right)$$

$$\times P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{\Gamma(n-1)}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n-1)\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma(l+n-1)}$$

$$\times \tau_l(\rho)\rho^l P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\rho^l P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv'),\qquad(2)$$

这儿

$$\tau_l(\rho)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n\right)}$$

$$\times F\left(l,-\frac{1}{2}n+1;\quad l+\frac{1}{2}n;\quad \rho^2\right),\qquad(3)$$

适合于

$$\lim_{\rho\to 1}\tau_l(\rho)=1.\qquad(4)$$

因此，Poisson 公式可以写成为

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\rho^l\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}.\qquad(5)$$

也就是如果给了一个函数 $f(v)$ 具有收敛的 Laplace 级数

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v} \qquad (6)$$

则在球内不变方程有解

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\tau_l(\rho)\cdot\rho^l\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')f(v)\dot{v},$$

它以 $f(v)$ 为其边界值.

附记 现在的处理方法是希望保持旧有的球面上的调和分析，不惜把 ρ^l 改为 $\rho^l\tau_l(\rho)$. 另一方面，可以保持因子 ρ^l 而改变所对应的 Legendre 函数. 例如把 (1) 改为

$$(1-\rho^2)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(n-1)}(uv')\rho^m=\sum_{l=0}^{\infty}Q_l(uv')\rho^l,$$

这儿

$$Q_l(\xi)=\sum_{0\leqslant k\leqslant\min(n-1,\frac{1}{2}l)}(-1)^k\binom{n-1}{k}P_{l-2k}^{(n-1)}(\xi).$$

然后再继续做下去.

§7. 完 备 性

前已证明，球上任一连续函数 $\varphi(u)$ 常有

$$\varphi(u)=\lim_{\rho\to1}\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l-n+2}{n-2}\rho^l\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')\varphi(v)\dot{v}.$$

由此推得：给予任一 $\varepsilon>0$，我们有 ρ 使

$$\left|\varphi(u)-\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l-n+2}{n-2}\rho^l\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')\varphi(v)\dot{v}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

又有 N 使

$$\left|\varphi(u) - \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{N} \frac{2l-n+2}{n-2} \rho^l \int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')\right.$$

$$\left.\varphi(v)\dot{v}\right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

我们现在证明：如果球上一个连续函数适合于

$$\int_{uu'=1}\cdots\int \varphi(u)P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')\dot{u} = 0,\ l = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \qquad (2)$$

则 $\varphi(u) \equiv 0$。

这是极易证明的事实，由 (1) 可知

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{uu'=1}\cdots\int \left(\varphi(u) - \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{N} \frac{2l-n+2}{n-2} \rho^l\right.$$

$$\left.\times \int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')\varphi(v)\dot{v}\right)^2 \dot{u} < \varepsilon. \qquad (3)$$

乘开积分，由 (2) 可知左边等于

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{uu'=1}\cdots\int [\varphi(u)]^2\dot{u} + \frac{1}{\omega_{n-1}}$$

$$\times \int_{uu'=1}\cdots\int \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{l=0}^{N} \frac{2l-n+2}{n-2} \rho^l \int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}\right.$$

$$\left.(uv')\varphi(v)\dot{v}\right)^2 \dot{u} \geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{uu'=1}\cdots\int [\varphi(u)]^2\dot{u}$$

由 (3) 推出：给任一 $\varepsilon > 0$，常有

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{uu'=1}\cdots\int [\varphi(u)]^2\dot{u} < \varepsilon.$$

除 $\varphi(u) \equiv 0$ 外，这是不可能的.

§8. 解偏微分方程 $\partial_u^2\Phi = \lambda\Phi$

考虑球面上的偏微分方程

$$\partial_u^2\Phi = \lambda\Phi. \qquad (1)$$

使此式有解的 λ 称为特征值. 今往证

定理 1 除 $\lambda=-l(l+n-2)(l=0,1,2,\cdots)$ 外无其他的特征值, 而 $P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')$ 是对应此特征值的解.

$$\partial_u^2 P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')=-l(l+n-2)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv'). \tag{2}$$

取 $v=(1,0,\cdots,0)$, 则 (2) 简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+(n-2)\operatorname{ctg}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(\cos\theta_1)$$

$$=-l(l+n-2)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(\cos\theta_1), \tag{3}$$

换变数,命 $\cos\theta_1=\xi$, 则 (3) 等价于

$$\left[(1-\xi^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-(n-1)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right]P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(\xi)$$

$$=-l(l+n-2)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(\xi),$$

这就是公式 (1.6), 因此当 $v=(1,0,\cdots,0)$ 时, (2) 式是正确的.

假定 v 是任一单位矢量,有正交方阵 Γ 使 $v\Gamma=(1,0,\cdots 0)$, 引进球座标

$$u\Gamma=(\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots\cdots),$$

则问题化为与上面所讲的完全一样.

再证如果

$$\partial_u^2\Phi=\lambda\Phi, \quad \partial_u^2\Psi=\mu\Psi, \quad \lambda\neq\mu, \tag{4}$$

则

$$\int_{vv'=1}\cdots\int\Phi(v)\Psi(v)\dot{v}=0. \tag{5}$$

由于

$$\int_{vv'=1}\cdots\int\Phi(v)\partial_v^2\Psi(v)\dot{v}=\sum_{p=1}^{n-1}J_p,$$

此处

$$J_p = \int \cdots \int_{vv'=1} \Phi(v) \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left(\sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_p} \right)$$
$$\times \frac{\sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}}{\sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{p-1} \sin^{n-p-1}\theta_p}.$$

当 $p < n - 1$ 时，J_p 中有一单积分

$$\int_0^\pi \Phi \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left(\sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_p} \right) d\theta_p$$
$$= \Phi \sin^{n-p-1}\theta_p \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_p} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_p} \sin^{n-p-1}\theta_p \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_p} d\theta_p$$
$$= \int_0^\pi \Psi \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left(\sin^{n-p-1} \theta_p \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_p} \right) d\theta_p,$$

即 Φ 与 Ψ 易地而处．当 $p = n - 1$ 时，方法也相仿，但需注意函数 Φ、Ψ 对 θ_{n-1} 的周期性．因此得到

$$\int \cdots \int_{vv'=1} \Phi(v) \partial_v^2 \Psi(v) \dot{v} = \int \cdots \int_{vv'=1} \Psi(v) \partial_v^2 \Phi(v) \dot{v}. \tag{6}$$

由此及 (4) 可知

$$(\lambda - \mu) \int \cdots \int_{vv'=1} \Phi(v) \Psi(v) \dot{v} = 0,$$

即得 (5) 式.

现在证明除

$$\lambda = -l(l + n - 2)$$

外，(1) 式无其他的特征根．同时也将证明，当 $\lambda = -l(l + n - 2)$ 时，除 $P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')$ 外无其他的特征函数．注意，这儿并不仅仅是一个特征函数，给予任一球面上的一点 v，有一特征函数 $P_l^{(\frac{1}{2}n-1)}(uv')$，这些特征函数成一线性空间（这空间的维数等于

$$\binom{n + l - 1}{l} - \binom{n + l - 3}{l - 2},$$

现在不去证明).

如果 λ 是另一特征根,而 $\Phi(v)$ 是对应的特征函数,则

$$\int\cdots\int_{vv'=1}\Phi(v)P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')\dot{v}=0,\ l=0,1,2,\cdots\cdots.$$

由完备性可知 $\Phi(v)=0$. 由完备性,易知当 $\lambda=-l(l+n-2)$ 时, $P_l^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}(uv')$ 表示了对应于此特征根的所有的特征函数.

§9. 附　记

我们也可以从 Poisson 核的性质推出超球函数的整套结果来. 例如:

(1) 首先

$$H(x,y)=\frac{1-xx'yy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{n/2}},\ xx'<1,\ yy'<1 \quad (1)$$

是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的调和函数. 直接证明之如次:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}H(x,y)=\frac{-2x_iyy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{n/2}}+\frac{n(1-xx'yy')(y_i-x_iyy')}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+1}}$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}H(x,y)=-\frac{2yy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{n/2}}-\frac{4nx_iyy'(y_i-x_iyy')}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+1}}-\frac{n(1-xx'yy')yy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}}}+n(n+2)\frac{(1-xx'yy')(y_i-x_iyy')^2}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+2}}.$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}H(x,y)=-\frac{2nyy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}}}$$

$$
-\frac{4nyy'(xy'-xx'yy')}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+1}}-\frac{n^2(1-xx'yy')yy'}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+1}}
$$

$$
+\frac{n(n+2)(1-xx'yy')[yy'-2xy'yy'+xx'(yy')^2]}{(1-2xy'+xx'yy')^{\frac{n}{2}+2}}
$$

$=0$.

(2) 我们有等式

$$
H(x,y)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{vv'=1}\cdots\int H(x,v)H(v,y)\dot{v},
$$

$$
xx'<1,\ yy'<1. \tag{2}
$$

这结果的证明是十分简单的,其原因是 $H(x, v)$ 就是 Poisson 核,而 $H(v, y)$ 是调和函数 $H(x, y)$ 的边界值.

(3) 命 $x=\rho u$, $y=rv$, 命

$$
H(\rho u, rv)=\frac{1-\rho^2r^2}{(1-2\rho ruv'+\rho^2r^2)^{n/2}}
$$

$$
=\sum_{l=0}^{\infty}Q_l(uv')(\rho r)^l \tag{3}
$$

是幂级数展开式,代入(2)中得

$$
\sum_{l=0}^{\infty}Q_l(uv')(\rho r)^l=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{ww'=1}\cdots\int\sum_{p=0}^{\infty}Q_p(uw')\rho^p
$$

$$
\times\sum_{q=0}^{\infty}Q_q(wv')r^q\dot{w},
$$

逐项求积分并比较系数得

$$
\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{ww'=1}\cdots\int Q_p(uw')Q_q(wv')\dot{w}=\begin{cases}0, & 若\ p\neq q,\\ Q_p(uv'), & 若\ p=q.\end{cases} \tag{4}
$$

(4) 取特例 $u=v=(1,0,\cdots,0)$, $w=(\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2,\cdots)$, $\dot{w}=\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}$, 得

$$
\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_0^{\pi}Q_p(\cos\theta_1)Q_q(\cos\theta_1)\sin^{n-2}\theta_1\,d\theta
$$

$$\times \int_0^\pi \sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}$$

$$= \begin{cases} 0, & 若\ p \neq q \\ Q_p(1), & 若\ p = q. \end{cases}$$

由于

$$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \int_0^\pi \sin^p\theta\, d\theta = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}$$

及 $Q_p(1)$ 是 $(1+x)(1-x)^{-(n-1)}$ 的展式中 x^p 的系数,即

$$Q_p(1) = \frac{(n-1)n\cdots(n+p-3)(n+2p-2)}{p!}$$

$$= \frac{(n+p-3)!(n+2p-2)}{(n-2)!p!},$$

因此得出

$$\int_0^\pi Q_p(\cos\theta_1) Q_q(\cos\theta_1) \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(n+p-3)!}{(n-2)!p!} (n+2p-2)\delta_{pq}.$$

命 $\cos\theta_1 = \xi$, 即得

$$\int_{-1}^1 Q_p(\xi) Q_q(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-3)} d\xi$$

$$= \frac{(n+2p-2)2^{2-n}\pi\cdot(n+p-3)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2 p!}\delta_{pq}. \tag{5}$$

(5) 把幂级数

$$H(\rho u, v) = \sum_{l=0}^\infty Q_l(uv')\rho^l$$

代入 Laplace 方程

$$\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}(H(\rho u, v))\right)+\frac{1}{\rho^2}\partial_u^2 H(\rho u, v)=0,$$

并比较 ρ^{l-2} 的系数得

$$l(n+l-2)Q_l(uv')+\partial_u^2 Q_l(uv')=0.$$

取特例 $v=(1, 0, \cdots, 0)$ 及 $\cos\theta=\xi$，即得：$Q_l(\xi)$ 适合于二阶微分方程：

$$(1-\xi^2)\frac{d^2Q_l}{d\xi^2}-(n-1)\xi\frac{dQ_l}{d\xi}+l(l+n-2)Q_l=0. \quad (6)$$

(6) 如前证明 $Q_l(uv')$ 在球上的完整性，及 Q_l 在 $(-1, +1)$ 中的完整性等等.

总之，重用 Poisson 公式可以推出超球函数的重要性质，这样的推导方法，把超球函数的研究和 Laplace 方程的研究更打成一片了.

习题 试证

$$\int_0^\pi Q_m(\xi\xi'+\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi'^2}\cos\theta)\sin^{n-3}\theta d\theta$$
$$=cQ_m(\xi)Q_m(\xi'),$$

并定出 c 来.

第三讲 扩充空间与球几何

§1. 二次变形与扩充空间

以上我们把单位圆推广到单位球，现在我们把整个平面(Gauss 平面连∞点)及在这平面上起作用的 Möbius 群都推广到 n 维空间. 我们现在讲得抽象些，但读者可以与第一章相仿，或通过使单位球不变的变形的形式而思考这些群是怎样想出来的.

我们从一个二次型

$$x_1^2+\cdots+x_n^2-y_1y_2=0 \tag{1}$$

出发，它的方阵是 $n+2$ 行列的方阵

$$J=\begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

我们考虑射影变换

$$(\xi^*,\eta_1^*,\eta_2^*)=\rho(\xi,\eta_1,\eta_2)M, \tag{3}$$

这儿 ξ, ξ^* 是 n 维实矢量，η_1, η_2, η_1^*, η_2^* 是实数，M 是

$$MJM'=J. \tag{4}$$

显然变换(3)保持关系

$$\xi\xi'=\eta_1\eta_2. \tag{5}$$

命

$$M=\begin{pmatrix} T & u_1' & u_2' \\ v_1 & a & b \\ v_2 & c & d \end{pmatrix}. \tag{6}$$

则得

$$\begin{cases}\xi^* = \rho(\xi T + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2), \\ \eta_1^* = \rho(\xi u_1' + \eta_1 a + \eta_2 c), \\ \eta_2^* = \rho(\xi u_2' + \eta_1 b + \eta_2 d).\end{cases} \tag{7}$$

研究非齐次坐标：命 $x = \xi/\eta_2$（是一矢量），$y = \xi^*/\eta_2^*$，由关系（5）可知

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = xx', \quad \frac{\eta_1^*}{\eta_2^*} = yy'.$$

（7）变成为变形

$$\begin{cases} y = \dfrac{xT + xx'v_1 + v_2}{xu_2' + xx'b + d}, \\ yy' = \dfrac{xu_1' + xx'a + c}{xu_2' + xx'b + d}. \end{cases} \tag{8}$$

注意（8）的第二式可由第一式推出.

由

$$M^{-1} = JM'J^{-1} = \begin{pmatrix} T', & -2v_2', & -2v_1', \\ -\frac{1}{2}u_2, & d, & b, \\ -\frac{1}{2}u_1, & c, & a \end{pmatrix}.$$

可以算得（8）的逆变换是

$$\begin{cases} x = \dfrac{yT' - \frac{1}{2}yy'u_2 - \frac{1}{2}u_1}{-2yv_1' + yy'b + a}, \\ xx' = \dfrac{-2yv_2' + yy'd + c}{-2yv_1' + yy'b + a}. \end{cases} \tag{9}$$

所有的形如（8）的变换成一群，以 G 表之.

对应于 $\eta_2 = 0$ 的点称为无穷远点，添进这无穷远点，所得出的空间称为扩充空间. 当 $\eta_2 = 0$，则 $\xi\xi' = 0$，因之 $\xi = 0$，而 $(\xi, \eta_1, \eta_2) = \eta_1(0, 1, 0)$ 唯一决定.

注意：由

$$xu_2' + xx'b + d = 0 \tag{10}$$

仅得一点. 首先由 M^{-1} 的性质,可知

$$-\frac{1}{4}u_2u_2' - bd = 0.$$

如果 $b = 0$，则 $u_2 = 0$，(10) 式无解，即(8)把 ∞ 变为 ∞. 如果 $b \neq 0$，则 (10) 式可以改写成为

$$\left(x - \frac{u_2}{b}\right)\left(x - \frac{u_2}{b}\right)' = 0,$$

即 (8) 把 $x = \frac{u_2}{b}$ 变为∞.

问题：把扩充空间变为自己，双有理变形是否就是 (8) 的形式.

不难证明扩充空间成一可递集，任意二点可以同时变为 $0, \infty$; 使 $0, \infty$ 不变的变形是

$$y = \frac{1}{d}xT,$$

此处 $TT' = I$，$a = \frac{1}{d}$. 因此,任一矢量 $x = \rho u$ 可以变为 e，取 $d = \rho$ 及 $uT = e$，即任意三点可以变为任意三点. 任意四点的不变量是什么?

§2. 微分度量,共形映照

由

$$(y, yy', 1) = \rho(x, xx', 1)M, \tag{1}$$

求微分得

$$(dy, 2ydy', 0) = [d\rho(x, xx', 1) + \rho(dx, 2xdx', 0)]M. \tag{2}$$

由于

$$(dy, 2ydy', 0)\,J\,(dy, 2ydy', 0)' = dydy'$$

及

$$(x, xx', 1)J(x, xx', 1)' = 0,$$

$$(x, xx', 1)J(dx, 2xdx', 0)' = 0,$$

所以

$$dydy' = \rho^2 dxdx'. \tag{3}$$

由于

$$1 = \rho(xu_2' + xx'b + d),$$

因此

$$dydy' = \frac{dxdx'}{(xu_2' + xx'b + d)^2}. \tag{4}$$

这说明了，这变形把无穷小球变为无穷小球，并且是保角变换.

由逆变换得

$$dxdx' = \frac{dydy'}{(-2yv_1' + yy'b + a)^2}. \tag{5}$$

由此二式建议

$$(xu_2' + xx'b + d)(-2yv_1' + yy'b + a) = 1. \tag{6}$$

(6) 式的直接证明是容易的,因为由 (1) 可知

$$1 = \rho(xu_2' + xx'b + d),$$

又由 $(y, yy', 1)M^{-1} = \rho(x, xx', 1)$ 可知

$$\rho = -2yv_1' + yy'b + a.$$

现在来证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = \lambda^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + (2-n)\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{7}$$

这儿 $\lambda = xu_2' + xx'b + d$.

由 (4) 可知

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_s}\frac{\partial y_i}{\partial x_t} = \frac{1}{\lambda^2}\delta_{st}, \tag{8}$$

乘以 $\dfrac{\partial x_t}{\partial y_j}$, 而对 t 相加得

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_s}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial x_s}{\partial y_j}. \tag{9}$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} &= \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} \\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2} \\ &=\lambda^4\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2} \\ &=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2}.\end{aligned}$$

与 (7) 相比较，我们看出所待证者是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2}=(2-n)\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}. \tag{10}$$

由 (8) 及 (9) 可知

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}=\lambda^2\delta_{pq}.$$

微分之得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p^2}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\partial y_q}=\frac{\partial\lambda^2}{\partial y_p}\delta_{pq},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p^2}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_q}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)^2\right)=\frac{\partial\lambda^2}{\partial y_p}\delta_{pq},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p^2}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}=\frac{\partial \lambda^2}{\partial y_p}\delta_{pq}-\frac{1}{2}\frac{\partial \lambda^2}{\partial y_q}.$$

乘以 $\dfrac{\partial y_q}{\partial x_r}$ 而对 q 相加,得到

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_p^2}=\frac{\partial \lambda^2}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_r}-\frac{1}{2}\frac{\partial \lambda^2}{\partial x_r},$$

对 p 相加,即得 (10) 式,因而得出 (7)式.

更深入些,我们利用恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(r^2\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-1}\Phi)\right)=r\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}-\Phi\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}. \tag{11}$$

由 (7) 可以推出: 命

$$Y(y)=X(x)\lambda^{\frac{n}{2}-1},$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}=\lambda^n\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\lambda^{1-\frac{n}{2}})^2\frac{\partial(\lambda^{\frac{n}{2}-1}X)}{\partial x_i}\right)$$

$$=\lambda^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}-\lambda^n X\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda^{\frac{n}{2}-1}}{\partial x_i^2}.$$

不难直接证明 $\lambda^{-\frac{n}{2}+1}$ 是调和函数,因而第二项等于 0,因此得出

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}=\lambda^{\frac{n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}. \tag{12}$$

§3. 球变为球

球可以写成为

$$\eta_1 yy'+y\xi'+\eta_2=0. \tag{1}$$

它可以用一个 $n+2$ 维的矢量 (ξ,η_1,η_2) 表之.

经变形 (1.8), 球 (1) 变为

$$\eta_1(xu_1' + xx'a + c) + (xT + xx'v_1 + v_2)\xi' + \eta_2(xu_2' + xx'b + d) = 0,$$

这也是一球. 这球以 $(\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*)$ 表之，则得

$$\begin{pmatrix} \xi^{*\prime} \\ \eta_1^* \\ \eta_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & u_1' & u_2' \\ v_1 & a & c \\ v_2 & b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

即得

$$(\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*) = (\xi, \eta_1, \eta_2)M'. \tag{2}$$

凑方 (1) 可以改写成为

$$\left(y - \frac{\xi}{2\eta_1}\right)\left(y - \frac{\xi}{2\eta_1}\right)' = \frac{\xi\xi'}{4\eta_1^2} - \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\xi\xi' - 4\eta_1\eta_2}{4\eta_1^2}.$$

因此，视

$$(\xi, \eta_1, \eta_2)J^{-1}(\xi, \eta_1, \eta_2)' = \xi\xi' - 4\eta_1\eta_2 \gtreqless 0$$

而球 (1) 表实球、点球或虚球.

不难证明变形 (1.8) 可以把实球、点球与虚球各变为

$$xx' = 1, \quad xx' = 0, \quad xx' = -1.$$

实球成一可递集，注意平面也是实球，特别 $x_1 = 0$ 就是一实球.

把上半空间 $x_1 > 0$ 变为单位球 $yy' < 1$ 内部的变换是

$$y = \frac{(xx' - 1, 2x_2, \cdots, 2x_n)}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

要证明这点是容易的，因为

$$yy' = \frac{(xx'+1)^2 + 4(xx' - x_1^2)}{(1 + 2x_1 + xx')^2} = \frac{(1 + xx')^2 - 4x_1^2}{(1 + xx' + 2x_1)^2} = \frac{1 + xx' - 2x_1}{1 + xx' + 2x_1}$$

及

$$1 - yy' = \frac{4x_1}{1 + xx' + 2x_1},$$

所以把 $x_1>0$ 变为 $yy'<1$。它把平面 $\xi_1=0$ 变为单位球面 $vv'=1$，即

$$v=\frac{(\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2-1,\ 2\xi_2,\ \cdots,\ 2\xi_n)}{1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}1-2yv'+yy'&=2\frac{1+xx'}{1+xx'+2x_1}\\&\quad-2\frac{(1-xx')(1-\xi_2^2\cdots\xi_n^2)+4(x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n)}{(1+xx'+2x_1)(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}\\&=4\frac{xx'+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2+2(x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n)}{(1+xx'+2x_1)(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}\\&=4\frac{x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2}{(1+xx'+2x_1)(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-yy'}{1-2y\dot{v}'+yy'}\right)^{n-1}\dot{v}&=\left(\frac{x_1(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}{x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2}\right)^{n-1}\\&\quad\times\frac{d\xi_2\cdots d\xi_n}{\left[\frac{1}{2}(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)\right]^{n-1}}\\&=\left(\frac{2x_1}{x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2}\right)^{n-1}d\xi_2\cdots d\xi_n.\end{aligned}$$

即得“上半”空间的 Poisson 公式

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(2x_1)^{n-1}\Phi(0,\xi_2,\cdots,\xi_n)d\xi_2\cdots d\xi_n}{[x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2]^{n-1}},$$

它所适合的偏微分方程是

$$x_1^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}+(2-n)x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=0. \tag{3}$$

又从 Laplace 方程关于单位球的 Poisson 公式

$$\Phi(y)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{vv'=1}\cdots\int\frac{1-yy'}{(1-2yv'+yy')^{n/2}}\Phi(v)\dot{v},\tag{4}$$

行变化

$$\Phi(y)=\Psi(x)\lambda^{\frac{n}{2}-1}=\Psi(x)(1+xx'+2x_1)^{\frac{n}{2}-1},\tag{5}$$

则

$$\Phi(v)=\Phi(0,\xi_2,\cdots,\xi_n)(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}n-1},$$

$$\frac{1-yy'}{(1-2yv'+yy')^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\frac{x_1(1+xx'+2x_1)^{\frac{n}{2}-1}(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-2}(x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\dot{v}=\left(\frac{2}{1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}\right)^{n-1}d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

由(4)及(5)得

$$\Psi(x)=(1+xx'+2x_1)^{1-\frac{n}{2}}\Phi(y)=(1+xx'+2x_1)^{1-\frac{n}{2}}$$

$$\times\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\omega'=1}\cdots\int\frac{1-yy'}{(1-2yv'+yy')^{\frac{n}{2}}}\Phi(v)\dot{v}$$

$$=(1+xx'+2x_1)^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int\frac{x_1(1+xx'+2x_1)^{\frac{n}{2}-1}(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{n}{2}}\Psi(0,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{2^{n-2}(x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2)^{n/2}}$$

$$\cdot(1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}n-1}\left(\frac{2}{1+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}\right)^{n-1}$$

$$d\xi_2\cdots d\xi_n=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int\frac{2x_1\Psi(0,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{(x_1^2+(\xi_2+x_2)^2+\cdots+(\xi_n+x_n)^2)^{\frac{n}{2}}}d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

这是"上半"空间的 Laplace 方程的 Poisson 公式。

§4. 两球相切，球串

两球

$$(\xi,\ \eta_1,\ \eta_2),\ (\xi^*,\ \eta_1^*,\ \eta_2^*)$$

相切的条件是什么？当然是

$$\left[\left(\frac{\xi}{2\eta_1}-\frac{\xi^*}{2\eta_1^*}\right)\left(\frac{\xi}{2\eta_1}-\frac{\xi^*}{2\eta_1^*}\right)'\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\xi\xi'-4\eta_1\eta_2}{4\eta_1^2}}\pm\sqrt{\frac{\xi^*\xi^{*\prime}-4\eta_1^*\eta_2^*}{4\eta_1^{*2}}},$$

即

$$(2\eta_1\eta_2^*+2\eta_2\eta_1^*-\xi\xi^{*\prime})^2$$
$$=(\xi\xi'-4\eta_1\eta_2)(\xi^*\xi^{*\prime}-4\eta_1^*\eta_2^*),$$

也就是行列式

$$\left|\begin{pmatrix}\xi, & \eta_1, & \eta_2\\ \xi^*, & \eta_1^*, & \eta_2^*\end{pmatrix}J^{-1}\begin{pmatrix}\xi, & \eta_1, & \eta_2\\ \xi^*, & \eta_1^*, & \eta_2^*\end{pmatrix}'\right|=0. \qquad (1)$$

这建议，我们应当研究二行二列的方阵

$$\begin{pmatrix}\xi, & \eta_1, & \eta_2\\ \xi^*, & \eta_1^*, & \eta_2^*\end{pmatrix}J^{-1}\begin{pmatrix}\xi, & \eta_1, & \eta_2\\ \xi^*, & \eta_1^*, & \eta_2^*\end{pmatrix}'=S. \qquad (2)$$

我们定义球串：由形如

$$\lambda(\xi,\ \eta_1,\ \eta_2)+\mu(\xi^*,\ \eta_1^*,\ \eta_2^*)$$

的球所组成的集合称为球串。

球串可以用 $2\times(n+2)$ 的矩阵

$$X=\begin{pmatrix}\xi, & \eta_1, & \eta_2\\ \xi^*, & \eta_1^*, & \eta_2^*\end{pmatrix}$$

来表它．如果有一二行二列的方阵 Q 使

$$QX=Y,$$

则 X, Y 表示同一球串。

由于 J^{-1} 的标签是 $n+1$ 正，1 负，所以 S 有三种可能性：(i) 定正，(ii) 降秩，(iii) 标签一正一负，所对应的球串各定义为椭圆的、抛物的及双曲的.

§5. 两球正交，球族

两球

$$(\xi, \eta_1, \eta_2), (\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*)$$

的夹角为 θ，则

$$\left(\frac{\xi}{2\eta_1}-\frac{\xi^*}{2\eta_1^*}\right)\left(\frac{\xi}{2\eta_1}-\frac{\xi^*}{2\eta_1^*}\right)'=\frac{\xi\xi'-4\eta_1\eta_2}{4\eta_1^2}+\frac{\xi^*\xi^{*\prime}-4\eta_1^*\eta_2^*}{4\eta_1^{*2}}$$

$$-2\sqrt{\frac{\xi\xi'-4\eta_1\eta_2}{4\eta_1^2}}\sqrt{\frac{\xi^*\xi^{*\prime}-4\eta_1^*\eta_2^*}{4\eta_1^{*2}}}\cos\theta,$$

也就是

$$\cos\theta=\frac{\xi\xi^{*\prime}-2\eta_1\eta_2^*-2\eta_2\eta_1^*}{\sqrt{(\xi\xi'-4\eta_1\eta_2)(\xi^*\xi^{*\prime}-4\eta_1^*\eta_2^*)}}$$

$$=\frac{(\xi, \eta_1, \eta_2)J^{-1}(\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*)'}{\sqrt{(\xi,\eta_1,\eta_2)J^{-1}(\xi,\eta_1,\eta_2)'(\xi^*,\eta_1^*,\eta_2^*)J^{-1}(\xi^*,\eta_1^*,\eta_2^*)'}}.$$

二球正交的条件是

$$(\xi, \eta_1, \eta_2)J^{-1}(\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*)'=0. \tag{1}$$

定义 与一定球正交的诸球所成的集合称为球族.

因之，依被正交球是实球、点球与虚球，而得出双曲、抛物、椭圆的三族.

§6. 保角映象

本节开始讲些更一般的结果.

如果有一变形

$$y=y(x),$$

使

$$dydy' = \frac{1}{\lambda^2} dxdx', \quad \lambda = \lambda(x), \tag{1}$$

并且把域 D_x 变为域 D_y，这个变形称为把 D_x 变为 D_y 的保角映象. 关于 Laplace 算子，我们有以下的性质:

定理 1 如果变换 $y = y(x)$ 适合于 (1)，而

$$Y(y) = X(x)\lambda^{\frac{1}{2}n-1}, \tag{2}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2} = \lambda^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}. \tag{3}$$

证

(1) 由 (1) 推得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \frac{\partial y_i}{\partial x_q} = \frac{1}{\lambda^2} \delta_{pq}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} = \lambda^2 \delta_{pq}, \tag{4}$$

而且有

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \lambda^2 \frac{\partial y_p}{\partial x_i}. \tag{5}$$

(2) 微分 (4) 式得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_s} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_q} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} = \delta_{pq} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_s}, \tag{6}$$

交换足码 s 与 q 得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} = \delta_{ps} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_q}. \tag{7}$$

(6) 与 (7) 相加得

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_s} \frac{\partial y_i}{\partial x_q}\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s}$$
$$= \delta_{pq} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_s} + \delta_{ps} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_q},$$

即得

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} = \delta_{pq} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_s} + \delta_{ps} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_q} - \delta_{sq} \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_p}. \tag{8}$$

乘以 $\frac{\partial x_p}{\partial y_j}$，并且对 p 求和得

$$2\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_q \partial x_s} = \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_s}\frac{\partial x_q}{\partial y_j} + \frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial x_q}\frac{\partial x_s}{\partial y_j} - \delta_{sq}\frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial y_j}. \tag{9}$$

（3）命 $q = s$，并对 q 求和得

$$2\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_q^2} = (2-n)\frac{\partial \lambda^{-2}}{\partial y_j}. \tag{10}$$

（4）再求（8）式对 x_t 的偏微商得

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_t}\cdot\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_t}$$

$$= \delta_{pq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_t} + \delta_{ps}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q \partial x_t} - \delta_{sq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_t}. \tag{11}$$

交换足码 p 与 t 得

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_t}\cdot\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_t}\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_p}$$

$$= \delta_{tq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_p} + \delta_{ts}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_q} - \delta_{sq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_t}. \tag{12}$$

两式相加得

$$4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_t}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_t}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_t}\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_p}\right) = \delta_{pq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_t} + \delta_{ps}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q \partial x_t}$$

$$+\delta_{tq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_p} + \delta_{ts}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_q} - 2\delta_{sq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_t}. \tag{13}$$

利用

$$\frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_i}{\partial x_t}\right) = \frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q \partial x_s}\delta_{pt} \tag{14}$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_s}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial y_i}{\partial x_t}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_t}\right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^3 y_i}{\partial x_q \partial x_s \partial x_p} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_s \partial x_t} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_s} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_t}\right), \tag{15}$$

由 (13), (14) 与 (15) 得

$$4\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_t}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} + 2\left(\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_q}\delta_{pt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q}\right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_s \partial x_t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_s} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_t}\right) = \delta_{pq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_t}$$

$$+ \delta_{ps}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q \partial x_t} + \delta_{tq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_p} + \delta_{ts}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_q} - 2\delta_{sq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_t},$$

即

$$4\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_t} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_s} - 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_s \partial x_t}$$

$$- 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_s}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q \partial x_t} = \delta_{pq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_t} + \delta_{ps}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q \partial x_t}$$

$$+ \delta_{tq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_p} + \delta_{ts}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_q} - 2\delta_{sq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_t} - 2\delta_{pt}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_s \partial x_q}. \tag{16}$$

(5) 在 (16) 中取 $t = p$, $s = q$ 得

$$4\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p^2} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_q^2} - 4\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q}\right)^2$$

$$= 4\delta_{pq}\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p \partial x_q} - 2\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p^2} - 2\frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_q^2}.$$

对 p, q 求和得

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_p \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p^2}\right)^2 - \sum_{p,q}\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q}\right)^2\right]$$

$$= (1-n)\sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 \lambda^{-2}}{\partial x_p^2}. \tag{17}$$

(6) 由 (9) 可知

$$4\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q}\right)^2=\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\frac{\partial x_q}{\partial y_i}+\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_q}\frac{\partial x_p}{\partial y_i}-\delta_{pq}\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2,$$

由此

$$\begin{aligned}4\sum_i\sum_{p,q}\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p\partial x_q}\right)^2&=4\sum_{p,q}\sum_i\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p\partial x_q}\right)^2\\&=\sum_{p,q}\sum_i\left[\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2\left(\frac{\partial x_q}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_q}\right)^2\left(\frac{\partial x_p}{\partial y_i}\right)^2\right.\\&\quad+\delta_{pq}\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2+2\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_q}\frac{\partial x_q}{\partial y_i}\frac{\partial x_p}{\partial y_i}\\&\quad\left.-2\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\delta_{pq}\frac{\partial x_q}{\partial y_i}-2\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_q}\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\delta_{pq}\frac{\partial x_p}{\partial y_i}\right]\\&=2n\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2+n\sum_i\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2+2\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2\\&\quad-4\sum_i\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2=2(n+1)\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2\\&\quad+(n-4)\sum_i\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2=(3n-2)\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2,\end{aligned}\tag{18}$$

这儿用了

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_i}\right)^2&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_j\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)^2\\&=\sum_{j,k}\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_k}\sum_i\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}=\lambda^2\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_j}\right)^2.\end{aligned}\tag{19}$$

(7) 将 (10) 与 (18) 代进 (17) 得 (并用 (19))

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial y_j}\right]^2-\frac{3n-2}{4}\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2\\=(1-n)\sum_p\frac{\partial^2\lambda^{-2}}{\partial x_p^2},\end{aligned}$$

即

$$\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{3n-2}{4}\right]\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2=(1-n)\sum_p\frac{\partial^2\lambda^{-2}}{\partial x_p^2},$$

$$\frac{(1-n)(6-n)}{4}\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2=(1-n)\sum_p\frac{\partial^2\lambda^{-2}}{\partial x_p^2},$$

即

$$(6-n)\lambda^2\sum_p\left(\frac{\partial\lambda^{-2}}{\partial x_p}\right)^2=4\sum_p\frac{\partial^2\lambda^{-2}}{\partial x_p^2},$$

也就是

$$\frac{n}{2}\sum_p\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_p}\right)^2=\lambda\sum_p\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_p^2}. \tag{20}$$

(8) 由

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial Y}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

及

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}=\sum_{j,k=1}^n\frac{\partial^2 Y}{\partial x_j\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial y_i}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial Y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2}.$$

由(10)可知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}&=\lambda^2\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial Y}{\partial x_j}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i^2}\\&=\lambda^2\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}+(2-n)\lambda\sum_{j=1}^n\frac{\partial Y}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\\&=\lambda^n\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{2-n}\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

(9) 利用恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Omega^2\frac{\partial}{\partial x}(\Omega^{-1}\Phi)\right)=\Omega\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}-\Phi\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i^2},$$

推得

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2}=\lambda^n\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda^{2-n}\frac{\partial(\lambda^{\frac{n}{2}-1}X)}{\partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda^n \left(\lambda^{1-\frac{n}{2}} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} - X \frac{\partial^2 \lambda^{1-\frac{n}{2}}}{\partial x_i^2} \right) = \lambda^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}$$

$$- X\lambda^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda^{1-\frac{n}{2}}}{\partial x_i^2} = \lambda^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}$$

$$- X \left(1 - \frac{n}{2}\right) \lambda^{\frac{n}{2}-1} \left(\lambda \sum_i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} - \frac{n}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \right),$$

由 (20) 可知最后一项等于 0. 因此得出

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 Y}{\partial y_i^2} = \lambda^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i^2}.$$

这就是本定理的结论.

附记 在定理的证明中也带便地证明了

$$\lambda^{1-\frac{n}{2}}, \quad \lambda^{1-\frac{n}{2}} y_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

都是调和函数.

问题 1 任何一个把单位球变为其内部的保角变换是否把两点间的非欧距离愈变愈短?

问题 2 如果一个把单位球变为其内部而且把原点变为原点的保角变换是否把同心球也变为其内部?

第四讲　Lorentz 群

§1. 换基本方阵

以往我们定义

$$J=\begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

而研究适合于

$$MJM'=J \tag{2}$$

的M所成的群.

由于

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

如命

$$P=\begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{3}$$

则得

$$P\begin{pmatrix} I^{(n+1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P'=\begin{pmatrix} I^{(n+1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

关于式(3)可以写得更具体:

$$P=\begin{pmatrix} M_1 & \frac{1}{2}(u_1'-u_2') & \frac{1}{2}(u_1'+u_2') \\ v_1-v_2 & \frac{1}{2}(a-b-c+d) & \frac{1}{2}(a+b-c-d) \\ v_1+v_2 & \frac{1}{2}(a-b+c-d) & \frac{1}{2}(a+b+c+d) \end{pmatrix},$$

其中

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & u_1' & u_2' \\ v_1 & a & b \\ v_2 & c & d \end{pmatrix}.$$

在今后相当长的一段时期内，我们研究适合于 (4) 的 P 所成的群，这群以 $L(n+1, 1)$ 表之，称为 $(n+1, 1)$ 型 Lorentz 群.

由 (4) 式可知

$$(\det P)^2=1,$$

即 P 之行列式之值等于 ± 1，行列式之值等于 1 的 P 成一子群，以 $L^+_{(n+1,1)}$ 表之，行列式之值等于 -1 的 P 构成一子集合，以 $L^-_{(n+1,1)}$ 表之. 特别如 $[1, \cdots, 1, -1]$ 就是一个行列式等于 -1 的 $L_{(n+1,1)}$ 方阵，且 $L^-_{(n+1,1)}$ 由 $L^+_{(n+1,1)}$ 中方阵乘以 $[1, \cdots, 1, -1]$ 构成，即

$$L^-_{(n+1,1)}=[1, \cdots, 1, -1]L^+_{(n+1,1)}.$$

所以群 $L_{(n+1,1)}$ 是由 $L^+_{(n+1,1)}$ 添加任一行列式等于 -1 的方阵而生成的，而且

$$\begin{aligned} L_{(n+1,1)} &= L^+_{(n+1,1)} \cup L^-_{(n+1,1)} \\ &= L^+_{(n+1,1)} \cup [1, \cdots, 1, -1]L^+_{(n+1,1)}. \end{aligned} \tag{5}$$

又如果把 P 的元素写成为

$$(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n+2},$$

则适合于

$$a_{n+2,n+2}>0 \tag{6}$$

的方阵也成一群，以 $L_{+(n+1,1)}$ 表之. 今往证明适合（6）的方阵成一群，命

$$B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n+2},\quad b_{n+2,n+2}>0,$$

及

$$C=AB,$$

则

$$c_{n+2,n+2}=\sum_{i=1}^{n+1}a_{n+2,i}b_{i,n+2}+a_{n+2,n+2}b_{n+2,n+2}.$$

由关系（4）已知

$$\sum_{i=1}^{n+1}a^2_{n+2,i}-a^2_{n+2,n+2}=-1,\ \sum_{i=1}^{n+1}a^2_{n+2,i}<a^2_{n+2,n+2},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}b^2_{i,n+2}-b^2_{n+2,n+2}=-1,\ \sum_{i=1}^{n+1}b^2_{i,n+2}<b^2_{n+2,n+2},$$

由 Schwarz-不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1}a_{n+2,i}b_{i,n+2}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}a^2_{n+2,i}\sum_{i=1}^{n+1}b^2_{i,n+2}}<a_{n+2,n+2}b_{n+2,n+2},$$

即得所证.

适合于

$$a_{n+2,n+2}<0\qquad(7)$$

的元素构成一子集合，以 $L_{-(n+1,1)}$ 表之，也显然有 $[1,\cdots,1,-1]\in L_{-(n+1,1)}$，且

$$L_{-(n+1,1)}=[1,\cdots,1,-1]L_{+(n+1,1)},$$

而且

$$\begin{aligned}L_{(n+1,1)}&=L_{+(n+1,1)}\cup L_{-(n+1,1)}\\&=L_{+(n+1,1)}\cup[1,\cdots,1,-1]L_{+(n+1,1)}.\end{aligned}$$

既属于 $L^+_{(n+1,1)}$ 又属于 $L_{+(n+1,1)}$ 的元素成一群，以 $L^+_{+(n+1,1)}$ 表之，即

$$L^+_{+(n+1,1)}=L^+_{(n+1,1)}\cap L_{+(n+1,1)}.$$

不难证明

$$L^{+}_{(n+1,1)} = L^{+}_{+(n+1,1)} \cup L^{+}_{-(n+1,1)}$$
$$= L^{+}_{+(n+1,1)} \cup [-1, 1, \cdots, 1, -1] L^{+}_{+(n+1,1)},$$

而

$$L_{(n+1,1)} = L^{+}_{+(n+1,1)} \cup L^{+}_{-(n+1,1)} \cup L^{-}_{+(n+1,1)} \cup L^{-}_{-(n+1,1)},$$

其中

$$L^{+}_{-(n+1,1)} = [-1, 1, \cdots, 1, -1] L^{+}_{+(n+1,1)},$$
$$L^{-}_{+(n+1,1)} = [1, \cdots, 1, -1, 1] L^{+}_{+(n+1,1)},$$
$$L^{-}_{-(n+1,1)} = [1, \cdots, 1, +1, -1] L^{+}_{+(n+1,1)}.$$

注意：条件 (6) 反映在原符号上是

$$a + b + c + d > 0.$$

§2. 演出元素

置换变换：固定 $i, j (i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n+1)$，由

$$y_i = x_j, y_j = x_i, y_k = x_k, (k \neq i, j; 1 \leqslant k \leqslant n+2) \quad (1)$$

的变形称为置换变形，以

$$P_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n+1)$$

表之．$P_{ij}P$ 表示 P 的第 i 行．第 j 行互换，PP_{ij} 表示 P 的第 i 列、第 j 列互换，这变换属于 $L^{-}_{+(n+1,1)}$.

如果固定 $i, j (i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n+1)$，由

$$y_i = x_j, y_j = -x_i, y_k = x_k (k \neq i, j; 1 \leqslant k \leqslant n+2)$$

的变形以

$$Q_{ij}$$

表之，则 Q_{ij} 属于 $L^{+}_{+(n+1,1)}$.

变形

$$R_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \cdots 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

称为旋转，它属于 $L^{+}_{+(n+1,1)}$。

$$R_{ij}(\theta)=Q_{i1}Q_{j2}R_{12}Q_{j2}^{-1}Q_{i1}^{-1},\ i,j=1,2,\cdots,n+1$$

所表示之变形是

$$y_i=\cos\theta x_i+\sin\theta x_j,\quad y_j=-\sin\theta x_i+\cos\theta x_j,$$

其它的 $x_k(k\neq i,j)$ 不变，这类的变形统称为旋转. 又

$$H_1(\phi)=\begin{pmatrix}\cos h\phi & 0 & \cdots & 0 & \sin h\phi\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \sin h\phi & 0 & \cdots & 0 & \cos h\phi\end{pmatrix}$$

称为双曲旋转.

$$H_i(\phi)=Q_{i1}H_1Q_{i1}^{-1}$$

也称为双曲旋转.

定理1 $L^{+}_{+(n+1,1)}$ 由置换、旋转、双曲旋转所演成的.

证 （1）先由极简单的性质出发：令

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos h\phi & \sin h\phi\\ \sin h\phi & \cos h\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\ c' & *\end{pmatrix},$$

由计算可知

$$c'=c\cos h\phi+d\sin h\phi.$$

如果 $d\neq 0$, $|c|\leqslant|d|$，则由

$$c\cos h\phi+d\sin h\phi=0,$$

亦即由

$$\tanh\phi=-\frac{c}{d}$$

可以解出 ϕ，即有 ϕ 使 $c'=0$。

（2）命 A 是 $L^{+}_{+(n+1,1)}$ 中任一方阵，记

$$A=\begin{pmatrix}A_1^{(n+1)} & \beta\\ \alpha & a_{n+2,n+2}\end{pmatrix},$$

则由 $A[1,\cdots,1,-1]A'=[1,\cdots,1,-1]$ 可知

$$\alpha\alpha' + 1 = a_{n+2,\, n+2}^{2},$$

因此，

$$a_{n+2,\, n+2} \neq 0, \quad |a_{n+2,j}| \leqslant |a_{n+2,\, n+2}|,$$

$$j = 1, 2, \cdots, n+1.$$

所以有 $H_1(\phi_1)$ 使

$$AH_1(\phi_1)$$

的 $(n+2, 1)$ 元素为 0，$AH_1(\phi_1)$ 仍旧属于 $L_{+(n+1,1)}^{+}$。再乘以合适的 $H_2(\phi_2)$ 使 $(n+2, 2)$ 元素为 0，等等．即可以乘以双曲旋转方阵使 A 变为

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1^{(n+1)} & \tilde{\beta} \\ 0 & \tilde{a}_{n+2,n+2} \end{pmatrix}$$

的形式，由于它适合 (1.4) 式，因此 $\tilde{\beta} = 0$，即

$$\tilde{a}_{1,\, n+2} = \cdots = \tilde{a}_{n+1,\, n+2} = 0.$$

所以 A 变为

$$B = \begin{pmatrix} B_1^{(n+1)} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B_1 B_1' = I^{(n+1)}, \quad a^2 = 1,$$

由于 B 属于 $L_{+(n+1,1)}^{+}$，所以 $a = 1$，$\det B_1 = 1$．因而 B_1 是一行列式等于 1 的正交方阵，可知它是旋转之积（读者如不知此结果，仍可由上法逐步得出之）．

说得更深刻些，$L_{+(n+1,1)}^{+}$ 可由置换 Q_{ij}，$R_{12}(\theta)$，$H_1(\phi)$ 而演出之，置换共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个，但注意它们仍然可以用

$$Q_{12} \quad 及 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \\ (-1)^n & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

演出之，但 $Q_{12} = R_{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)$，因此一共有三种元素即可演出 $L_{+(n+1,1)}^{+}$。

问题 演出元素还能再减少否?

定理 2 $L_{(n+1,1)}$ 的元素可以由 Q_{ij}, $R_{12}(\theta)$, $H_1(\phi)$, $[1,\cdots,1,-1]$, $[1,\cdots 1,-1,-1]$ 演出之.

回到原来的形式,对应于 R_{12} 有

$$y_1 = \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2,$$
$$y_2 = -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2,$$
$$y_i = x_i, i = 3, 4, \cdots, n+2.$$

其次对应于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

我们有

$$u_1 = 2e_n, \quad u_2 = -2e_n, \quad v_1 = \frac{(-1)^n}{2} e_1,$$

$$v_2 = -\frac{(-1)^n}{2} e_1, \ a = b = c = d = \frac{1}{2},$$

即

$$y_1 = (-1)^n \frac{xx'-1}{-4x_n + xx' + 1},$$

$$y_i = \frac{2x_{i-1}}{-4x_n + xx' + 1}, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

而对应于 $H_1(\phi)$, 我们有

$$y_1 = \frac{(\cos h\phi)x_1}{(\sin h\phi)x_1 + \frac{1}{2}(1 - \cos h\phi)xx' + \frac{1}{2}(1 + \cos h\phi)},$$

$$y_i = \frac{x_i}{(\sin h\phi)x_1 + \frac{1}{2}(1 - \cos h\phi)xx' + \frac{1}{2}(1 + \cos h\phi)},$$

$$y_n = \frac{x_n}{(\sin h\psi)x_1 + \frac{1}{2}(1 - \cos h\psi)xx' + \frac{1}{2}(1 + \cos h\psi)}.$$

§3. 正交相似

为了便于引进和解决 Lorentz 相似的问题，我们重复一下正交相似的概念和处理方法.

我们现在考虑m行列的正交方阵，也就是考虑适合于

$$TT' = I \tag{1}$$

的实方阵 T.

命 A, B 是两个正交方阵，如果有一个正交方阵 T 存在使

$$TAT^{-1} = B, \tag{2}$$

则 A, B 称为正交相似.

正交相似的几何意义是：在一个正交系统有一个正交变换 A，换为另一个正交系统，它和原系统关系为 T，则在新系统下，这正交变换的方阵是 TAT^{-1}.

最熟悉的例子是 $m=3$. 任何一个行列式等于1的正交变换一定可以选择系统使它变为绕 z 轴的旋转，也就是有 T 使

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们现在将证明，任何一个正交方阵一定正交相似于

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$

$$\dotplus 1 \dotplus \cdots \dotplus 1 \dotplus (-1) \dotplus \cdots \dotplus (-1), \tag{3}$$

这儿 $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_\nu < 2\pi$.

这是熟知的结果，但我们依旧写下它的证明作为今后的楷模.

(1) 先证：有了几个互相正交的单位矢量

$$v_1, \cdots, v_r \quad (r < m),$$

即

$$v_i v_j' = \delta_{ij},$$

我们一定还可以添上一个 v_{r+1}, 即

$$v_{r+1} v_i' = 0, \quad v_{r+1} v_{r+1}' = 1.$$

这证明是十分简单的. 取一与 $v_1, \cdots, v_r$ 线性无关的矢量 u. 命

$$u_{r+1} = u - c_1 v_1 - \cdots - c_r v_r, \; c_\nu = u v_\nu',$$

则显然有

$$u_{r+1} v_\nu' = u v_\nu' - c_\nu = 0.$$

由于 u_{r+1} 非 0 矢量,所以

$$u_{r+1} u_{r+1}' = \xi > 0.$$

而 $v_{r+1} = \dfrac{1}{\sqrt{\xi}} u_{r+1}$ 即合所求.

(2) 正交方阵的特征根的绝对值等于 1.

如果 λ 是 A 的特征根则其对应的特征矢量是 z, 即

$$zA = \lambda z.$$

由于 A 是实方阵,所以

$$\bar{z} A = \bar{\lambda} \bar{z}.$$

因此,

$$z\bar{z}' = zAA'\bar{z}' = |\lambda|^2 z\bar{z}',$$

而 $z\bar{z}' \neq 0$, 因此 $|\lambda|^2 = 1$.

(3) 如果 A 有一复特征根 $e^{i\theta}(\neq \pm 1)$, 而

$$zA = e^{i\theta} z,$$

把 z 分为虚实部分 $z = x + yi$, 则

$$xA = \cos\theta x - \sin\theta y, \quad yA = \sin\theta x + \cos\theta y,$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

二行二列的方阵

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} xx' & xy' \\ yx' & yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ t & u \end{pmatrix}$$

是定正的，而且

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} AA' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}',$$

即

$$\begin{pmatrix} s & t \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

由此推得 $t=0$，$s=u$。命

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{s}} x, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{s}} y,$$

则得

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

而 v_1, v_2 是互相正交的二单位矢量.

由 (1) 可以作一方阵 T 以 v_1, v_2 为其第一、二行，则

$$TAT^{-1} = TAT' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ \sin\theta & \cos\theta & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\left(\text{这儿用了} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right)$，再由 TAT' 的

正交性可得

$$a_{13}=\cdots=a_{1m}=a_{23}=\cdots=a_{2m}=0,$$

$$a_{31}=\cdots=a_{m1}=a_{32}=\cdots=a_{m2}=0.$$

用归纳法即得所求证的结果.

(4) 如果A有 1 为特征根,命x是其对应的特征矢量,即

$$xA=x,$$

不妨假定$xx'=1$,作一以x为第一行的正交方阵T,则

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}.$$

同法处理A有 -1 为特征根的情况.

附记 二正交方阵正交相似的必要且充分的条件是它们有相同的特征多项式.

§4. 关于非定正二次型

先证明与二次型

$$x_1^2+\cdots+x_{m-1}^2-x_m^2=xFx',\ F=[1,\cdots,1,-1]$$

有关的几个容易的结果.

(1) 不能有两个线性无关的矢量y, z对任何λ, μ常使

$$(\lambda y+\mu z)F(\lambda y+\mu z)'=0,$$

即

$$\lambda^2yFy'+2\lambda\mu yFz'+\mu^2zFz'=0,$$

即

$$yFy'=0,\quad yFz'=0,\quad zFz'=0,$$

即

$$y_1^2+\cdots+y_{m-1}^2=y_m^2,$$

$$z_1^2+\cdots+z_{m-1}^2=z_m^2,$$

$$y_1z_1+\cdots+y_{m-1}z_{m-1}=y_mz_m.$$

由此推得

$$(y_1^2+\cdots+y_{m-1}^2)(z_1^2+\cdots+z_{m-1}^2)$$
$$-(y_1z_1+\cdots+y_{m-1}z_{m-1})^2=0,$$

即

$$\sum_{i<j}(y_iz_j-y_jz_i)^2=0.$$

这与 y, z 的独立性矛盾.

(2) 命 P 是一 l 行 m 列的矩阵 $(l<m)$, 则

$$PFP'$$

的标签中最多只有一个负号.

PFP' 是一 l 行 l 列的方阵, 如果标签中有两个负号, 即有 $Q(=Q^{(l)})$ 使

$$QPFP'Q'=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}.$$

命 QP 的第一,第二行是 y, z, 则

$$yFy'=-1,\quad zFz'=-1,\quad yFz'=0.$$

即

$$\sum_{i=1}^{m-1}y_i^2=y_m^2-1,\quad \sum_{i=1}^{m-1}z_i^2=z_m^2-1,\quad \sum_{i=1}^{m-1}y_iz_i=z_my_m,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{m-1}y_i^2+1\right)\left(\sum_{i=1}^{m-1}z_i^2+1\right)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}y_iz_i\right)^2,$$

同法这是不可能的.

(3) 以上的证明方法实质上给出了以下的结果.

如果 P 的秩等于 l, 则

$$PFP'$$

的标签只有以下三种可能性:

(i) 定正,即 l 个 $+1$;

(ii) 半定正;即 $l-1$ 个 $+1$, 一个 0;

(iii) 非定正;即 $l-1$ 个 $+1$, 一个 -1;

而无其他的可能性.

§5. Lorentz 相 似

在以下几节中命

$$F=\begin{pmatrix} I^{(n+1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

适合于

$$TFT'=F$$

的方阵简称为 Lorentz 方阵.

命 A, B 是两个 Lorentz 方阵,如果有一 Lorentz 方阵 T 使

$$TAT^{-1}=B, \tag{2}$$

则 A, B 称为 Lorentz 相似.

我们将证明: 任何一个 Lorentz 方阵一定 Lorentz 等价于以下六种类型的方阵的直和:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad +1, -1, \begin{pmatrix} \cos h\phi, & \sin h\phi \\ \sin h\phi, & \cos h\phi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

但最后三种总共只能出现一次.

(1) 在证明这结果之前先证明:

如果 $v_1, \cdots, v_r$ 适合于

$$v_iFv_j'=\delta_{ij}, \quad i, j=1, \cdots, r,$$

则可以添一 v_{r+1} 使

$$v_{r+1}Fv_j'=0, \quad j=1, \cdots, r,$$

及

$$v_{r+1}Fv_{r+1}'=-1.$$

命

$$u_{r+1}=e_n-\lambda_1 v_1-\cdots-\lambda_r v_r,\quad \lambda_\nu=e_n F v_\nu',$$

则

$$u_{r+1}F v_\nu'=e_n F v_\nu'-\lambda_\nu=0.$$

再看

$$u_{r+1}F u_{r+1}'=e_n F e_n'-2\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu e_n F v_\nu'+\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j v_i F v_j'$$

$$=-1-2\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^2+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^2=-1-\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^2<0,$$

而

$$v_{r+1}=u_{r+1}/\sqrt{1+\lambda_1^2+\cdots+\lambda_r^2}$$

即合所求.

如果 $r+1<n$, 则还可以添上 v_{r+2} 使

$$v_{r+2}F v_\nu'=0,\quad \nu=1,2,\cdots,r+1$$

及

$$v_{r+2}F v_{r+2}'=1.$$

取一与 $v_1,\cdots,v_{r+1}$ 线性无关的矢量 u, 作

$$u_{r+2}=u-\sum_{\nu=1}^{r+1}\lambda_\nu v_\nu,\quad \begin{matrix}\lambda_\nu=uFv_\nu',\\(\nu=1,\cdots,r)\end{matrix}\quad \lambda_{r+1}=-uFv_{r+1}'$$

则

$$u_{r+2}F v_\nu'=0,\quad \nu=1,\cdots,r+1.$$

如果

$$u_{r+2}F u_{r+2}'\leqslant 0,$$

则

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_{r+2}\end{pmatrix}F\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_{r+2}\end{pmatrix}'=[1,\cdots 1,-1,-1].$$

由 § 4 可知这是不可能的. 取

$$v_{r+2}=u_{r+2}/\sqrt{u_{r+2}F u_{r+2}'},$$

即得所证.

(2) A 不能有绝对值 $\neq 1$ 的复特征根.

如果 $\rho e^{i\theta}(\rho\neq 1,\theta\neq 0$ 或 $\pi)$ 是一特征根, 而 z 是对应的特征矢量,则

$$zA=\rho e^{i\theta}z.$$

由于

$$zF\bar{z}'=zAFA'\bar{z}'=\rho^2 zF\bar{z}',$$

及 $\rho\neq 1$,所以

$$zF\bar{z}'=0.$$

记 $z=x+yi$, 则得

$$xFx'+yFy'=0,\quad xFy'=0. \tag{1}$$

又由于

$$A=FA'^{-1}F,$$

所以 $\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ 也是特征根,它的特征矢量是 $w=u+iv$, 即

$$wA=\frac{1}{\rho e^{i\theta}}w,$$

同样有

$$uFu'+vFv'=0,\quad uFv'=0. \tag{2}$$

再由

$$zF\bar{w}'=zAFA'\bar{w}'=e^{2i\theta}zF\bar{w}',$$

所以

$$zF\bar{w}'=0,$$

即

$$xFu'+yFv'=0,\quad xFv'-yFu'=0. \tag{3}$$

总之,得到

$$\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}F\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a&0&c&d\\0&-a&d&-c\\c&d&b&0\\d&-c&0&-b\end{pmatrix}.$$

如果 $a \neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & -a & d & -c \\ c & d & b & 0 \\ d & -c & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^{-1} & I \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & * \\ 0 & 0 & * & -p \end{pmatrix},$$

$$p = b - \frac{c^2 - d^2}{a},$$

它是一个有两个负号的对称方阵．当 $a = 0$ 时，也显然可见它不是仅有一个负号或奇异的方阵．由 § 4 的结果知道这是不可能的．

（3）如果 A 有一实特征根 $\lambda \neq \pm 1$，由于 $A'^{-1} = FAF$，所以 $\frac{1}{\lambda}$ 也是一个特征根，各对应一个特征矢量 x 与 y，即

$$xA = \lambda x, \quad yA = \frac{1}{\lambda} y.$$

由

$$xFx' = xAFA'x' = \lambda^2 xFx',$$

可知

$$xFx' = 0,$$

同法

$$yFy' = 0.$$

命 $xFy' = a$，则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $a = 0$，由 § 4 知其不可能．取 $\frac{x}{a}$ 代为新的 x，则得

$$xFx' = yFy' = 0, \quad xFy' = 1.$$

由于

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

命

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda^{-1} + \lambda}{2} & \frac{\lambda^{-1} - \lambda}{2} \\ \frac{\lambda^{-1} - \lambda}{2} & \frac{\lambda^{-1} + \lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

命 $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) = \cos h\psi$, 则

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \cos h\psi & \sin h\psi \\ \sin h\psi & \cos h\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

存在一 Lorentz 方阵 T, 以 v_1、v_2 为其最后二行,如此则得

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1m-2}, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-2,1}, & a_{m-2,2}, & \cdots, & a_{m-2,m-2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \cos h\psi, & \sin h\psi \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \sin h\psi, & \cos h\psi \end{pmatrix},$$

这儿 $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m-2}$ 是一正交方阵.

(4) 如果 A 有一绝对值等于 1 的复根,则与§3同法可以证明存在一个 Lorentz 方阵 T 使

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

这儿 $(a_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant m}$ 是一个 $m-2$ 行列的 Lorentz 方阵.

§6. (续)

由上节的结果可知: 所留待研究的情况是 A 仅以 $+1$ 与 -1 为特征根的情况.

假定 1 是 A 的特征根,而 x 是其对应的特征矢量,即

$$xA = x. \tag{1}$$

(1) 假定有一个适合于 (1) 的矢量使

$$xFx' > 0.$$

不妨假定 $xFx'=1$. 取以 x 为第一行的 Lorentz 方阵 T, 则

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

这儿 A_1 是 $m-1$ 行列的 Lorentz 方阵.

(2) 假定有一个适合于(1)的矢量使

$$xFx'<0.$$

不妨假定 $xFx'=-1$, 取一个以 x 为末行的 Lorentz 方阵 T, 则

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

这儿 A_2 是一个 $m-1$ 行列的正交方阵.

(3) 主要难点在于处理所有使 $xA=x$ 的矢量 x 都使 $xFx'=0$ 的情况.

如果有两个线性无关的 x, y 使

$$xA=x, \quad xFx'=0,$$
$$yA=y, \quad yFy'=0. \tag{2}$$

由于

$$(\lambda x+\mu y)A=\lambda x+\mu y,$$

所以也有

$$(\lambda x+\mu y)F(\lambda x+\mu y)'=0,$$

即得

$$xFy'=0.$$

而

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}F\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由 § 4 的结果知其不可能.

因此只有一个矢量(相差一常数倍) x 使 $xA=x$, $xFx'=0$.

(4) 如果 A 有一个特征根 -1, 假定

$$zA=-z,$$

如果 $zFz' \neq 0$，则用 (1)、(2) 的同法解决问题，如果 $zFz' = 0$，则

$$xFz' = xAFA'z' = -xFz',$$

即 $xFz' = 0$. 因而

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这是不可能的.

(5) 由 (3) 及 (4) 可知现在仅需研究的是 A 仅以 $+1$（或 -1）为特征根，而且只有一个线性无关的矢量以 1 为特征根的（也就是它的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

的）. 当 $m \geqslant 2$，还有矢量 y 使

$$yA = y + x. \tag{3}$$

由

$$yFy' = yAFA'y' = (x+y)F(x+y)' = yFy' + 2xFy',$$

即得

$$xFy' = 0. \tag{4}$$

由于

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yFy' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

因此 $yFy' = a \neq 0$. 如果 $m = 2$，则(5)的左边非奇异的，因而也不可能，所以 $m \geqslant 3$.

即还有一矢量 z 使

$$zA = z + y. \tag{6}$$

由

$$zFy' = zAFA'y' = (z+y)F(y+x)'$$
$$= zFy + yFy' + zFx',$$

可得

$$xFz' = -yFy' = -a, \tag{7}$$

又由

$$\begin{aligned} zFz' &= zAFA'z' = (z+y)F(z+y)' \\ &= zFz' + 2yFz' + yFy', \end{aligned}$$

可得

$$yFz' = -\frac{1}{2}yFy' = -\frac{1}{2}a.$$

因此得出

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & a & -\frac{1}{2}a \\ -a & -\frac{1}{2}a & b \end{pmatrix}, \quad b = zFz'. \tag{8}$$

如果还有矢量 w 使

$$wA = w + z, \tag{9}$$

则由

$$xFw' = xAFA'w' = xF(w+z)' = xFw' + xFz',$$

即 $xFz' = 0$。这与 $a \neq 0$ 相矛盾. 因此 $m = 3$, 而

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{10}$$

(6) 我们现在考虑对称方阵(8), 它的行列式等于 $-a^3(\neq 0)$,它是 $+1, +1, -1$ 型的二次型,因此 $a > 0$。命

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{a}}x, \quad y^* = \frac{1}{\sqrt{a}}y,$$

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{a}}(\lambda x + z), \quad \lambda = \frac{b}{2a}.$$

则

$$x^*Fx^{*\prime} = 0, \quad x^*Fy^{*\prime} = 0, \quad x^*Fz^{*\prime} = -1,$$

$$y^*Fy^{*\prime}=1,\quad y^*Fz^{*\prime}=-\frac{1}{2}$$

及

$$z^*Fz^{*\prime}=\frac{1}{\sqrt{a}}(2\lambda xFz'+zFz')=\frac{1}{\sqrt{a}}(-2a\lambda+b)=0.$$

另一方面依然有

$$\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}.$$

取消*号，不妨假定，我们原来的 $a=1$，$b=0$。总之，我们有

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\tag{11}$$

及

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

不难直接验算：命

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-2\\0&-\sqrt{2}&-1\\-\frac{\sqrt{2}}{8}&\frac{\sqrt{2}}{8}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

则

$$P\begin{pmatrix}0&3&2\sqrt{2}\\-1&0&0\\0&2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

及

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P'=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

命

$$P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T,$$

则

$$TA=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}A=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&3&2\sqrt{2}\\-1&0&0\\0&2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}T,$$

而且

$$TFT'=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}'P'^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}P'^{-1}=F,$$

即得所证.（同法处理特征根等于 -1 的情况.）

§7. Lorentz 相似的标准型

总之，任何一个 Lorentz 方阵一定相似于以下四种形式

之一：

(a) $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu, & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu, & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$
$$\dotplus \underbrace{1 \dotplus \cdots \dotplus 1}_{t\text{个}} \dotplus \underbrace{(-1) \dotplus \cdots \dotplus (-1)}_{s\text{个}} \dotplus (\pm 1),$$

(b) $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu, & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu, & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$
$$\dotplus \underbrace{1 \dotplus \cdots \dotplus 1}_{t\text{个}} \dotplus \underbrace{(-1) \dotplus \cdots \dotplus (-1)}_{s\text{个}}$$
$$\dotplus \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix},$$

(c) $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$
$$\dotplus \underbrace{1 \dotplus \cdots \dotplus 1}_{t\text{个}} \dotplus \underbrace{(-1) \dotplus \cdots \dotplus (-1)}_{s\text{个}}$$
$$\dotplus \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix},$$

(d) $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$$
$$\dotplus \underbrace{1 \dotplus \cdots \dotplus 1}_{t\text{个}} \dotplus \underbrace{(-1) \dotplus \cdots \dotplus (-1)}_{s\text{个}}$$
$$\dotplus \begin{pmatrix} \cos h\psi & \sin h\psi \\ \sin h\psi & \cos h\psi \end{pmatrix}.$$

注意：与正交方阵不同之处在于：正交方阵的相似性可以完全由特征方阵来决定，但 Lorentz 方阵则不能，不但不能由特征方阵来决定，而且不能由初等因子来决定，除去初等因子之外，还必须看其右下角元素的符号，即不难证明：Lorentz

方阵 Lorentz 相似的必要且充分条件是它们有相同的初等因子,而且右下角的元素同号.

也不难证明 Lorentz 方阵对应于非 ± 1 的特征根的初等因子都是单的,而等于 ± 1 时也仅有一次,三次两种可能性.

§8. 对合变换

定义 一个 $n+2$ 阶的 Lorentz 方阵 A,若适合

$$A^2 = \rho I, \quad \rho = \bar{\rho} \neq 0, \tag{1}$$

则称为对合.

由于 $\det A^2 = 1$,所以 $\rho^{n+2} = 1$,因此 $\rho = 1$.

从上节知对合 Lorentz 方阵 Lorentz 相似于标准型

$$[1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, \pm 1], \tag{2}$$

所以下面两类对合 Lorentz 方阵有其基本的重要性:

(i) Lorentz 相似于

$$[-1, 1\cdots, 1, 1, 1] \tag{3}$$

的对合 Lorentz 方阵,称为照镜,空间对称;

(ii) Lorentz 相似于

$$[1, \cdots 1, 1, -1] \tag{4}$$

的对合 Lorentz 方阵,称为反演,时间对称.

其基本重要性在于其他的对合都是由有限个相互可交换的属于(i)、(ii)的对合相乘而得到,同时形如(i)和(ii)的对合互不 Lorentz 相似.

现在来定出照镜和反演的一般形式:

(i) 由于对任一照镜 A,存在 Lorentz 方阵 P,使得

$$PAP^{-1} = [-1, 1, \cdots 1, 1, 1] = I - 2[1, 0, \cdots, 0].$$

所以

$$A = I - 2P^{-1}[1, 0, \cdots, 0]P.$$

然而由 $P \in L_{(n+1,1)}$ 可知 $P^{-1} = FP'F$,代入有

$$A = I - 2[1,\cdots 1,-1]P'[1,\cdots,1,-1][1,0,\cdots,0]$$
$$\times P = I - 2[1,\cdots,1,-1]p'p,$$
其中 p 是 P 的第一个行向量，由于 $P \in L_{(n+1,1)}$，故 $pFp' = 1$，所以照镜的一般形式为：

$$A = I - 2Fp'p, \quad pFp' = 1. \tag{5}$$

(ii) 由于对任一反演 A，存在 Lorentz 方阵 P，使得

$$PAP' = [1,\cdots,1,-1] = I - 2[0,\cdots,0,1],$$

所以

$$A = I - 2P^{-1}[0,\cdots,0,1]P,$$

由于 $P^{-1} = FP'F$，代入可知

$$A = I + 2FP'[0,\cdots,0,1]P = I + 2Fq'q,$$

其中 q 是 P 的 $n+2$ 个行向量，由于 $P \in L_{(n+1,1)}$，故 $qFq' = -1$，所以反演的一般形式为

$$A = I + 2Fq'q, \quad qFq' = -1. \tag{6}$$

对任一对合 Lorentz 方阵 A 利用 (1.3) 得到方阵

$$M = \left[I^{(n)}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} A \left[I^{(n)}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{7}$$

我们称变形

$$(y, yy', 1) = \rho(x, xx', 1)M \tag{8}$$

为对合．当 A 是照镜时，对合 (8) 称为照镜，当 A 是反演时，对合 (8) 称为反演．

照镜的标准型为

$$y_1 = -x_1, \quad y_2 = x_2, \cdots, \quad y_n = x_n. \tag{9}$$

反演的标准型为

$$y = -\frac{x}{xx'}. \tag{10}$$

前者由于

$$A = [-1, 1, \cdots, 1],$$

故

$$M=[-1,1,\cdots,1],$$

后者由于

$$A=[1,\cdots 1,-1],$$

故

$$M=\left[1,\cdots,1,\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right].$$

所以

$$y=\rho x,\quad yy'=-\rho,\quad -\rho xx'=1,$$

即

$$\rho=-\frac{x}{xx'},$$

所以

$$y=-\frac{x}{xx'}.$$

第五讲　球几何的基本定理
——兼论狭义相对论的基本定理

§1. 引　　言

1946年作者研究矩阵几何学时，用了一个方法，这方法可以用来处理n维球空间的基本定理，也就是用球相切性可以推出球几何学的基本定理，也就是不必用变换的解析性，甚至连续性，就可以推导出其变换群是球几何学的Lie群、Laguerre群.

这儿只讲三维空间的球几何学，其原因是一方面比较具体，易于接受，另一方面企图使这一成果能为一些物理工作者所注意．实质上三维的球几何学就是狭义相对论的另一表达形式，而这点往往未被认识．例如，1961年，B. A. Фок写的"Теория пространства, времена и тяготения 一书(有中译本，1965年科学出版社出版)，书中仍旧用的是Riemann几何、解析群论的老路子．而中、英、德等文的译本中也都未注意到这一点，而加以应有的注记.

对狭义相对论来说，原有两个假设：

(A) 相对性原理中要求匀速直线运动还是匀速直线运动.

(B) 光速不变原理是假设光以常速c作直线运动.

我们现在处理的方法是有了光速不变原理，就可以推出Lorentz群了，就是相对性原理中要求匀速直线运动还是匀速直线运动是推论而不是假设．这给我们提供了方便，如果要

验证或推翻上述二点，只要用实验来检验光速不变性就够了．至于如何推到 n 维球几何学及一般 Hermite 方阵几何学上去，就更不是我们的着重点了．

我们讲的球是以 (x, y, z) 为球心，R 为半径的球．如果 R 是正的，则球带一个向外的箭头(图 1)，如 R 是负的，则球带一向内的箭头(图 2)．

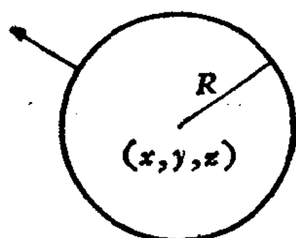


图 1

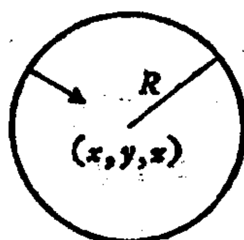


图 2

两球相切的条件是它们所带的箭头在切点须同向．

两球 (x, y, z, R)，(x_1, y_1, z_1, R_1) 相切的条件是

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(R-R_1)^2 \quad (1)$$

当 R，R_1 是同号时是内切，异号时是外切，即如图 3．我们的球几何学就是以球为元素所形成空间的几何学．

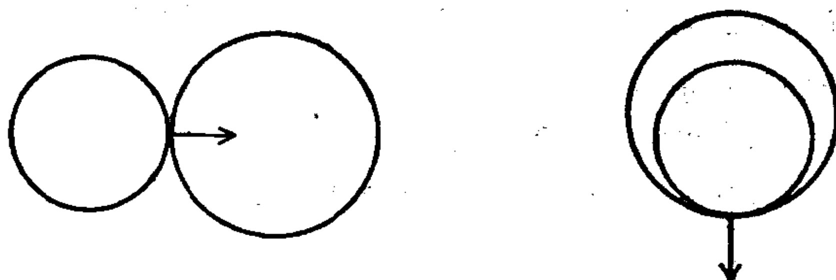


图 3

用二行二列的 Hermite 方阵

$$H=\begin{pmatrix} R+x & y+iz \\ y-iz & R-x \end{pmatrix}$$

表示 (x, y, z) 为中心，R 为半径的球，则相切条件 (1) 就是

$$H - H_1 = \begin{pmatrix} R - R_1 + x - x_1, & y - y_1 + i(z - z_1) \\ y - y_1 - i(z - z_1), & R - R_1 - (x - x_1) \end{pmatrix}$$

的行列式为 0. 相切就是我们矩阵几何里称为的粘切. 我们的问题是找出使二行二列 Hermite 方阵一一变为 Hermite 方阵保持粘切关系不变的最大的群来.

改为相对论的语言，在地点为 (x, y, z)，时间为 t 的时空点，用 Hermite 方阵

$$\begin{pmatrix} ct + x, & y + iz \\ y - iz, & ct - x \end{pmatrix}$$

来表示. 粘切的条件就是两点的距离正好等于光行的时间乘光速.

不象 Фок 那样，在这儿仅需要二行二列方阵运算就够了.

§2. 匀速直线运动

一件事的发生必有时间 t，必有地点 (x, y, z)，匀速直线运动可以表成为

$$x - x_0 = v_x(t - t_0),\ y - y_0 = v_y(t - t_0),$$
$$z - z_0 = v_z(t - t_0). \tag{1}$$

这是沿方向 $v_x : v_y : v_z$，依速度 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ 前进的直线匀速运动，而当时间 $t = t_0$ 时，通过 (x_0, y_0, z_0).

将 (1) 改写成为

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha\tau, \\ y - y_0 = \beta\tau, \\ z - z_0 = \gamma\tau, \\ t - t_0 = \delta\tau. \end{cases} \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{2}$$

由此可以看到三维空间的匀速直线运动 (1) 与四维空间的直线 (2) 一一对应.

由四维空间的仿射几何的基本定理（参阅华罗庚、万哲先：典型群（1962），上海科技出版社出版），可以知道把四维空间一一地变为其自己，把直线变为直线的变形一定是仿射变换.

如果引进无穷远点使仿射空间扩充成为射影空间，则由射影几何的基本定理（参阅典型群）可知所定出的变换就是射影变换. 这就是 Фок 书中附录一的第一个结论. 这儿我们不但没有要求变换有三阶偏微商的条件，连连续性都未假定.

§3. Hermite 方阵的几何学

以下如不特殊声明，大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表二行二列的复数方阵. 适合于 $P=\bar{P}'$ 的方阵称为 Hermite 方阵或简称 H 方阵. 显然变换

$$X^{*}=AX\bar{A}'+X_0, \qquad \bar{X}_0'=X_0 \tag{1}$$

把 Hermite 方阵 X 变为 Hermite 方阵 X^{*}，这儿 A 是可逆方阵. 除此之外，还有变换

$$X^{*}=-X, \tag{2}$$

$$X^{*}=X', \tag{3}$$

两个 H 方阵 X_1, X_2，如果 X_1-X_2 之秩等于 1，则 X_1，X_2 称为粘切. 这样定义是为了更方便地把这章的结果推到 n 行列的 H 方阵，现在实际上就是

$$|X_1-X_2|=0. \tag{5}$$

我们的基本定理就是：把 H 方阵变为 H 方阵的一一对应，且保持粘切关系不变的变形，就是由 (1)、(2)、(3) 所演成的群.

我们现在来说明 (1)、(2)、(3) 所成的群与 Lorentz 群的关系，对应一个 H 方阵

$$X = \begin{pmatrix} ct + x & y + iz \\ y - iz & ct - x \end{pmatrix}, \tag{6}$$

有一个矢量

$$\omega = (ct, x, y, z). \tag{7}$$

每一个 H 方阵 X 的变换对应于一个矢量 ω 的变换. 变换

$$X^* = X + X_0 \tag{8}$$

就对应于平移.

$$\omega^* = \omega + \omega_0. \tag{9}$$

因此只要考虑

$$X^* = AX\bar{A}' \tag{10}$$

及(2),(3). 它们所对应的线性变换就是

$$\omega^* = \omega L(A). \tag{11}$$

对(10)取行列式得

$$\begin{aligned} &\omega^*[1, -1, -1, -1]\omega^{*\prime} \\ &\quad = \omega[1, -1, -1, -1]\omega'|A\bar{A}'|, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\omega L[1, -1, -1, -1]L'\omega' \\ &\quad = \omega[1, -1, -1, -1]\omega'|A\bar{A}'|. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &L[1, -1, -1, -1]L' \\ &\quad = |A\bar{A}'|[1, -1, -1, -1], \end{aligned} \tag{12}$$

即 $L(A)/|A\bar{A}'|^{\frac{1}{2}}$ 是 Lorentz 变换, 但须注意 A 与 $e^{i\theta}A$ 代表同一 Lorentz 变换. 因此不妨假定

$$|A| = \rho^2 > 0.$$

当 $A = \rho I$ 时,所对应的变换是度量变换. 因此, $A = \rho B$, 而 $|B| = 1$. 而两个 A, 即 $\pm A$, 对应于同一个 Lorentz 变换及同一个度量变换. 以下假设 $|A| = 1$.

现在先研究一些特殊的 A 与 $L(A)$ 的对应关系:

(i)
$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\theta, & -\sin\frac{1}{2}\theta\\ \sin\frac{1}{2}\theta, & \cos\frac{1}{2}\theta\end{pmatrix},$$

$$L(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

即绕 z 轴的旋转.

(ii)
$$A=\begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}i\theta}&0\\0&e^{-\frac{1}{2}i\theta}\end{pmatrix},$$

$$L(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&\sin\theta\\0&0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

即绕 x 轴的旋转.

(iii)
$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\theta, & -i\sin\frac{1}{2}\theta\\ -i\sin\frac{1}{2}\theta, & \cos\frac{1}{2}\theta\end{pmatrix},$$

$$L(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},$$

即绕 y 轴的旋转.

(iv)
$$A=\begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}\phi}&0\\0&e^{-\frac{1}{2}\phi}\end{pmatrix}(\phi>0),$$

$$L(A)=\begin{pmatrix}\cosh\phi&\sinh\phi&0&0\\\sinh\phi&\cosh\phi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

这就是双曲旋转.

$$\text{(v)} \qquad X^* = X',\ t^* = t,\ x^* = x,\ y^* = y,\ z^* = -z,$$

即是空间反演.

$$\text{(vi)} \qquad X^* = -AX'\bar{A}',\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$t^* = -t,\ x^* = x,\ y^* = y,\ z^* = z$$

即是时间反演.

由于 (i), (ii), (iii), $L(A)$ 演出所有的旋转群，而 A 演出所有行列式为 1 的酉群,因此行列式为 1 的酉群的 $\pm U$ 与旋转群对应. (i), (ii), (iii), (v)的 $L(A)$ 给出正交群. 而 (i), (ii), (iii), (iv) 的 $L(A)$ 给出 $L_+^\uparrow$的所有变换. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi)的 $L(A)$ 给出 Lorentz 群的所有的变换.

这阐明了我们所用的符号与狭义相对论的符号的一致性. 即用我们符号所得出的变换是 Lorentz 变换,而且是全部的 Lorentz 变换. 值得一提的是由 (i)、(ii)、(iii) 中的 A 演出的是二维特殊 U_2 群, 即适合 $U\bar{U}' = I$, $|U| = 1$ 的 U 所成的群. 因此可见 $\pm U_2$ 与旋转群 Γ_3 是对应的.

附记. 对任一 $A(|A| = 1)$, 一定有一方阵 $P(|P| = 1)$ 使

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\psi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\theta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各得出在 Lorentz 群下, Lorentz 方阵的标准型除双曲变换及旋转外还有一种,这就是第四章 § 5 的一个奇特的标准型. 但用 2 × 2 方阵就特别显著了, 就是 A 有重特征根而且初等因子非单纯的. 致于这样的变换的相对论意义这是作者至今不能了解的.

我们的基本定理的物理意义是“光以常速 c 作直线运动”刻划了 Einstein 的狭义相对论. 实际上如果我们假定消息传递有上界，我们这一套数学工具还是可用. 今后用 x_0, x_1, x_2, x_3 来替代 t, x, y, z.

§4. 三维空间中使单位球不变的仿射变换

引理 1 一个使单位球不变的仿射变换一定是正交变换（参阅第三章 §1）.

证 假定

$$y = xA + b \tag{1}$$

是一个这样的变换，这儿 x, y, b 是三维矢量，A 是三行三列的非奇异方阵，(1) 把单位球 $xx' = 1$ 变为 $yy' = 1$.

可知有两个正交方阵 Γ_1, Γ_2 使

$$\Gamma_1 A \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_r > 0.$$

因此不失普遍性可以假定

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

特别取单位球上的点

$$x = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \ \frac{2t}{1 + t^2}, \ 0\right),$$

则得

$$1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \left(\lambda_1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + b_1\right)^2 + \left(\frac{2t\lambda_2}{1 + t^2} + b_2\right)^2 + b_3^2,$$

即

$$(1+t^2)^2=(\lambda_1(1-t^2)+b_1(1+t^2))^2$$
$$+(2t\lambda_2+b_2(1+t^2))^2+b_3^2(1+t^2)^2.$$

比较 t 的系数，得 $\lambda_2 b_2=0$，即得 $b_2=0$。同法证明 $b_1=b_3=0$。代入后再比较 t^4 的系数，得 $\lambda_1^2=1$，即得 $\lambda_1=1$，同法得 $\lambda_2=\lambda_3=1$，即(1)是一恒等变换.

为了将来引用方便，我们把三维空间及刚体运动群写成为二行二列的方阵形式：

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\iff X=\begin{pmatrix}x_1, & x_2+ix_3\\ x_2-ix_3, & -x_1\end{pmatrix},$$

即三维空间的一点 (x_1, x_2, x_3) 可用二行二列 t 为 0 的 H 方阵表出来.

直线

$x=a+\lambda b\iff X=A+\lambda B\quad(-\infty<\lambda<\infty).$

平面 $\qquad ax'=\mu\iff \mathrm{tr}(AX)=2\mu.$

两点的距离的平方

$$(x-u)(x-u)'\iff -|X-U|.$$

由上一节可知：刚体运动群

$$\left.\begin{array}{l}y=x\Gamma+b\\ \Gamma\Gamma'=I,|\Gamma|=1\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{ll}Y=UX\bar{U}'+B, & \bar{B}'=B,\\ U\bar{U}'=I, & |U|=1.\end{array}\right.$$

注意右边 U 与 $-U$ 代表同一变换.

欧几里得群是刚体运动群再添上一反射

$$y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=-x_3\iff Y=X'.$$

所以欧几里得群可以用

$$Y=UX\bar{U}'+B$$

添加 $Y=X'$ 来表达出来.

§5. 粘切子空间

我们现在回来考虑§3中所提出的问题. 我们所讨论的

空间是四维时空空间，也就是所有的二行二列的H方阵所成的空间，这空间的点就是指一二行二列的H方阵．变换指§3中所定义的仿射变换．我们将用粘切关系来定义一些几何图形．

定义 1 命A, B是两个粘切的点．与A, B都粘切的点所成的集合称为粘切子空间．

定理 1 任一粘切子空间可以变为标准型

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < a < \infty. \tag{1}$$

也就是说，在仿射变换下，粘切子空间成一可递集合．

证 经仿射变换，不妨假定

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

命

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \gamma \text{ 实数}.$$

由粘切关系

$$|A - X| = |B - X| = 0,$$

可得

$$\alpha\gamma - |\beta|^2 = 0, \qquad (\alpha - 1)\gamma - |\beta|^2 = 0.$$

所以$\gamma = 0, \beta = 0$．即得所证．

定理 2 两个不同的粘切子空间Σ_1, Σ_2最多只能有一个公共点．如果有一个公共点，它们可同时变成为

$$\Sigma_1: \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < a < \infty,$$

$$\Sigma_2: \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad -\infty < b < \infty.$$

证 由定义，不同的粘切子空间不可能有两个公共点．

假定公共点是 0. 并不妨假定其一已经是标准型 Σ_1 ,Σ_2 的元素的形式一定是

$$d\begin{pmatrix} |s|^2 & s\bar{t} \\ \bar{s}t & |t|^2 \end{pmatrix}, \qquad t \neq 0, d \neq 0. \tag{2}$$

变换

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -st^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \overline{\begin{pmatrix} 1 & -st^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}'$$

使 Σ_1 不变,但把 (2) 变为

$$d\begin{pmatrix} 1 & -st^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s\bar{s} & s\bar{t} \\ \bar{s}t & t\bar{t} \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} 1 & -st^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}' = d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |t|^2 \end{pmatrix},$$

这和 0 获得 Σ_2.

定理 3 仅有一公共点的三个粘切子空间可以同时变为

Σ_1: $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < a < \infty,$$

Σ_2: $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad -\infty < b < \infty,$$

Σ_3: $$d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < d < \infty.$$

证 假定其中的两个已经变成标准型 Σ_1, Σ_2 了. 在 Σ_3 中有一元素如 (2) 形, 其 s, t 都不能为 0, 不然它就属于 Σ_1 或 Σ_2 了.

变换

$$Y = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} X \overline{\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}}'$$

使 Σ_1, Σ_2 不变,而把 (2) 变为

$$d\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |s|^2 & s\bar{t} \\ \bar{s}t & |t|^2 \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}}' = d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

即得定理.

§ 6. 空相平面(或二维空相子空间)

定义 1 命 Σ_1 与 Σ_2 是两个仅有一公共点的粘切子空间，所有既不与 Σ_1 粘切，又不与 Σ_2 粘切的点所成的集合定义为二维空相子空间(或空相平面).

定理 1 空相平面是可递的,其标准型是

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

这儿 β 过所有的复数.

证 不妨假定 Σ_1, Σ_2 是§ 5 定理 2 的形式.

命

$$X = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & \gamma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

是空相平面中的一点. 由于没有 a, b 能使

$$\begin{vmatrix} \alpha - a & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma - b \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $\gamma = \alpha = 0$. 即得所证.

二维空相子空间的一般形式是

$$X = A \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \bar{\tau} & 0 \end{pmatrix} \bar{A}' + B \tag{2}$$

这儿 τ 过所有的复数.

§ 7. 空 相 直 线

定义 两个不同的空相平面如果有一个以上的交点，则交点的集合称为一条空相直线(或一维空相子空间).

定理 1 空相直线有以下的标准型:

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, \qquad -\infty < \rho < \infty. \tag{1}$$

证 不妨假定其一空相平面就是

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi \text{ 为复数.} \tag{2}$$

另一由 § 6 (2) 给出. 其两个公共点是 $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_1$. 仿射变换

$$Y=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\left(X-\begin{pmatrix} 0 & \xi_0 \\ \bar{\xi}_0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

把 ξ_0, ξ_1 变为 $\xi=0$ 及 $\xi=\rho_1$(实数)$(\xi_1-\xi_0=\rho_1 e^{-2i\theta})$. 由 § 6 (2) 得

$$0=A\begin{pmatrix} 0 & \tau_0 \\ \bar{\tau}_0 & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ \bar{\tau}_1 & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B. \tag{4}$$

对任一实数 ρ, (3) 乘以 $\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)$ 加上 (4) 乘以 $\frac{\rho}{\rho_1}$, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}
=A\begin{pmatrix} 0, & \left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)\tau_0+\frac{\rho}{\rho_1}\tau_1 \\ \left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)\bar{\tau}_0+\frac{\rho}{\rho_1}\bar{\tau}_1, & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B,$$

即可知 (1) 是两空相平面的相交部分.

再证明 (1) 之外无其它的点,如还有一 ξ_0(非实数), 即

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_0 \\ \bar{\xi}_0 & 0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \bar{\tau}_2 & B \end{pmatrix}\bar{A}'+B, \tag{5}$$

对任一复数 ξ, 可以取实数 β, 使 $\xi-\beta\xi_0=\alpha$ 是实数. (3) 乘以 $1-\alpha-\beta$, 加上 (4) 乘以 α/ρ_1, 再加上 (5) 乘以 β, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= A\begin{pmatrix} 0 & (1-\alpha-\beta)\tau_0+\frac{\alpha}{\rho_1}\tau_1+\beta\tau_2 \\ (1-\alpha-\beta)\tau_0+\frac{\alpha}{\rho_1}\tau_1+\beta\tau_2 & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B,$$

即与空相平面(2)全同.

§8. 点　　对

依 $|A-B|\gtreqless 0$ 把点对 A，B 分为三个类型：能有因果关系的点对(或称双曲对)；粘切对(或称抛物对)；不能有因果关系的点对(或称椭圆对).

定理 1　空相平面上任意二点都无因果关系.

定理 2　在仿射变换下，任一双曲对可变为标准型

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

任一抛物对可变为标准型

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

任一椭圆对可变为标准型

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 2 的证明是显然的，从略. 由定理 2 可立即推出定理 1. 由于任何两个有因果关系的点都可以同时变到 0，I，如在同一空相平面上，即有

$$0 = A\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B,\qquad I = A\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \\ \xi_1 & 0 \end{pmatrix}\bar{A}'+B.$$

相减取行列式得：$1=-|\xi-\xi_1|^2$，这不可能.

定理 3　在保持粘切关系的一一对应之下，任一点对的类型不变.

证　抛物对显然变为抛物对. 故只要证明任一椭圆对变

为椭圆对即可.不妨认为这椭圆对就是标准型$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.这二点的连线是空相直线$\begin{pmatrix}0&\rho_1\\\rho_1&0\end{pmatrix}$, $-\infty<\rho_1<\infty$. 由空相平面变为空相平面,故空相直线变为空相直线,而由§7定理1得到空相直线的一般形式是

$$A\begin{pmatrix}0&\rho\\\rho&0\end{pmatrix}\bar{A}'+B,-\infty<\rho<\infty.$$

其上任意两点显然都是椭圆对,所以椭圆对变为椭圆对. 因而,双曲对也一定变为双曲对.

§9. 三维空相子空间

定义1 在空相平面S_2外,存在一点P与S_2上任何一点都不能有因果关系. 作P与S_2的所有点的直线(空相). 这些线上的点的集合称为三维空相子空间

定理1 三维空相子空间的标准型是

$$\begin{pmatrix}x_1, & x_2+ix_3\\x_2-ix_3, & -x_1\end{pmatrix},\qquad -\infty<x_1,x_2,x_3<\infty. \tag{1}$$

证 不妨假定空相平面S_2就是

$$\begin{pmatrix}0&q\\\bar{q}&0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

命$P=\begin{pmatrix}p_0&q_0\\\bar{q}_0&r_0\end{pmatrix}$是$S_2$外之一点. 变形

$$Y=X-\begin{pmatrix}0&q_0\\\bar{q}_0&0\end{pmatrix}$$

使(2)不变. 而把P变为

$$P=\begin{pmatrix}p_0&0\\0&r_0\end{pmatrix}.$$

由于与0无因果关系,所以$p_0r_0<0$. 再由变换

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

可以假定

$$P = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

由 (2) 与 (3) 作联线.

$$\mu p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (1-\mu)\begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu p & (1-\mu)q \\ (1-\mu)\bar{q} & -\mu p \end{pmatrix},$$

即得所证.

§ 10. 基本定理的证明

1. 命 π_3 是一个三维空相子空间. 命 P 是 π_3 外的一点. 我们有一仿射变换把 π_3 变为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

及 P 变为

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

其证明是: 不妨先假定 π_3 已变为 (1). 命

$$P = \begin{pmatrix} p_0 + p_1, & p_2 + ip_3 \\ p_2 - ip_3, & p_0 - p_1 \end{pmatrix}, \qquad p_0 \neq 0.$$

则

$$Y = \frac{1}{p_0}\left[X - \begin{pmatrix} p_1, & p_2 + ip_3 \\ p_2 - ip_3, & -p_1 \end{pmatrix}\right]$$

把 (1) 变为自己, P 变为 (2).

2. 命

$$Y = \Phi(X) \tag{3}$$

是一个把 H 方阵变为 H 方阵的一一对应, 而且保持粘切关系.

由三维空相子空间的定义及§8(注意纯由粘切关系得来的).因此我们不妨假定

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2+iy_3 \\ y_2-iy_3 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

这样的子空间用 π_3 表之,且有

$$\Phi(I)=I. \tag{4}$$

在 π_3 上得到一个普通的三维空间 (x_1, x_2, x_3), 不难证明,其中的平面是二维空相平面,直线必是一维空相子空间.由仿射空间的基本定理,有把直线变为直线性质的变换就是三维空间的仿射变换.不仅如此,由于粘切关系

$$\left|I-\begin{pmatrix} x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}\right|=1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0,$$

这仿射变换还要保持单位球不变.

由§3, §4的结果知道,当 $X, Y\in\pi_3$ 时,则

$$Y=UX\overline{U}', \qquad U\overline{U}'=I.$$

3. 因此不妨假定

$$\Phi\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2+i\xi_3 \\ \xi_2-i\xi_3, & -\xi_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2+i\xi_3 \\ \xi_2-i\xi_3, & -\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

一般的点

$$\begin{pmatrix} x_0+x_1, & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3, & x_0-x_1 \end{pmatrix}, \qquad (x_0\neq 0)$$

与 π_3 中的点粘切的条件是

$$x_0^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2. \tag{6}$$

由(3)可知凡适合于(6)的 ξ_1, ξ_2, ξ_3 也一定适合于

$$y_0^2=(y_1-\xi_1)^2+(y_2-\xi_2)^2+(y_3-\xi_3)^2; \tag{7}$$

反之亦真.

π_3 中有两点 $\xi_1=x_1\pm x_0, \xi_2=x_2, \xi_3=x_3$ 适合(6), 代入(7), 得到

$$y_0^2=(y_1-x_1\pm x_0)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2. \tag{8}$$

由于对±号都对,所以

$$(y_1-x_1)x_0=0,$$

即得 $y_1=x_1$. 同法证明 $x_2=y_2$, $x_3=y_3$ 及 $x_0=\pm y_0$. 因此得出结论

$$\Phi\begin{pmatrix} x_0+x_1, & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3, & x_0-x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm x_0+x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & \pm x_0-x_1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

离恒等变换只差一±号了.

4. 我们已经知道 $\Phi(I)=I$. 我们再证 Φ 也使

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

不变. 由 (9) 可知如果它变,只能变为

$$\begin{pmatrix} -\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & -\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

它不和 I 粘切. 同法, Φ 也使

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu \end{pmatrix} \tag{11}$$

不变.

再证, Φ 也使

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1+\mu \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)+\frac{1}{2}(\lambda-\mu) & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)-\frac{1}{2}(\lambda-\mu) \end{pmatrix} \tag{12}$$

不变. 若不然由 (9) 它只能变到

$$\begin{pmatrix} -1-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)+\frac{1}{2}(\lambda-\mu) & 0 \\ 0 & -1-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)-\frac{1}{2}(\lambda-\mu) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1-\mu & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

与 (10) 及 (11) 粘切的可能性是

$$(2+\lambda+\mu)(2+\lambda)=0, \quad (2+\lambda+\mu)(2+\mu)=0.$$

即仅有 $\lambda=\mu=-2$, 及 $\lambda+\mu=-2$ 两个例外,即

$$\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}.$$

后者本来不变, 前者不变为其自己, 则变为 I, 这不可能. 因此也是不变的.

5. 现在已知形如

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0+y_1 & 0 \\ 0 & y_0-y_1 \end{pmatrix}$$

的方阵不变. 考虑一般的情况 (9), 由于对任一方阵,可取 y_0 充分大,使 $(x_0-y_0)^2-x_2^2-x_3^2>0$, 因此有 y_1 使

$$(x_0-y_0)^2=(x_1-y_1)^2+x_2^2+x_3^2.$$

这样的 y_0, y_1 不能使

$$(-x_0-y_0)^2=(x_1-y_1)^2+x_2^2+x_3^2$$

成立. 因此 (9) 中的±号只能取+号,因此每一元素都不变.

到此为止, 我们多次用了仿射变换, 最后化 Φ 为恒等变换,也就是原来的 Φ 是仿射变换.

§11. 时空几何的基本定理

定理 1 一个把时空点变为时空点的一一对应, 而且使行列式

$$|X_1-X_2| \tag{1}$$

不变，一定是 Poincare 变换：即

$$Y = \pm AX\overline{A}' + B, \ |A| = 1, \ \overline{B}' = B.$$

$$Y = X'.$$

证 即使 (1) 不变，当然就是粘切关系不变．因此，

$$Y = \rho AX\overline{A}' + B,$$

或

$$Y = \rho AX'\overline{A}' + B.$$

但

$$|Y_1 - Y_2| = \rho^2|X_1 - X_2| \cdot |A|^2 = \rho^2|X_1 - X_2|.$$

因此，得 $\rho = \pm 1$.

定理 2 在定理 1 的假定下，再加以时光不能倒流，左旋，右旋的旋向不变，则一定是如下的形式

$$Y = AX\overline{A}' + B.$$

显然还可有：因果关系不变是光速不变的推论．

§ 12. H 方阵的射影几何学

在上面的处理中，我们实际上有一个无害的约定："把一个有限的H方阵变为一个有限的 H 方阵"．如果我们允许有无穷远的H方阵，则我们有以下的"H 方阵射影几何学"．

首先，对一个H方阵，我们引进"齐性坐标"，也就是把 X 表成为

$$X = X_2^{-1}X_1, \tag{1}$$

这儿 X_1, X_2 都是二行二列的方阵．这一对方阵

$$(X_1, X_2) \tag{2}$$

称为X的齐性坐标．由于

$$X = \overline{X}',$$

所以

$$X_2^{-1}X_1 = \overline{X}_1'\overline{X}_2'^{-1}, \text{ 即 } X_1\overline{X}_2' = X_2\overline{X}_1'. \tag{3}$$

或可写成为

$$(X_1, X_2)J(\overline{X_1, X_2})' = 0, \text{ 而 } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

以上处理中，我们当然假定了，X_2 是非奇异的．同时，对所有的 Q，$|Q| \neq 0$，

$$Q(X_1, X_2) = (QX_1, QX_2) \quad (5)$$

代表同一个 X．我们现在扩充这一概念，如果二行四列方阵 (2) 的秩等于 2，而且适合于 (4)，则 (X_1, X_2) 称为一Hermite对，或简称H对．如果两个H对相差一因子(如 (5))，则称为等价．由等价关系把H对分类，一类定义一点，所有这样定义出来的点称为形成一H方阵的射影空间．

命T是一适合于

$$TJ\overline{T}' = J \quad (6)$$

的 4×4 方阵，则

$$(X_1^*, X_2^*) = Q(X_1, X_2)T \quad (7)$$

称为射影空间的一个变换．命

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (8)$$

则

$$A\overline{B}' = B\overline{A}', \ C\overline{D}' = D\overline{C}', \ A\overline{D}' - B\overline{C}' = I. \quad (9)$$

表成非齐次形式，则变换 (7) 可以写成为

$$X^* = X_2^{*-1}X_1^* = (X_1B + X_2D)^{-1}(X_1A + X_2C)$$
$$= (XB+D)^{-1}(XA+C) = (\overline{A}'X+\overline{C}')(\overline{B}'X+\overline{D}')^{-1}. \quad (10)$$

这可由 (9) 直接验证．而 $|X_2| = 0$ 的点称为无穷远处的点．由 (10) 可知

$$X^* - Y^* = (XB + D)^{-1}(XA + C)$$
$$-(\overline{A}'Y + \overline{C}')(\overline{B}'Y + \overline{D}')^{-1}$$
$$= (XB + D)^{-1}[(XA + C)(\overline{B}'Y + \overline{D}')$$
$$-(XB + D)(\overline{A}'Y + \overline{C}')](\overline{B}'Y + \overline{D}')^{-1}$$

$$= (XB + D)^{-1}(X - Y)(\bar{B}'Y + \bar{D}')^{-1}. \qquad (11)$$

因此，粘切关系还是不变的（如果 X_1^*, X_2^*, X_1, X_2 都是有限点）.

对齐性坐标,粘切条件可以写成为

$$|(X_1, X_2)J\overline{(Y_1, Y_2)}'| = 0. \qquad (12)$$

我们可以证明

定理 1 把H方阵的射影空间一一对应地变为自己，而且使粘切关系 (12) 不变的变换一定是 (7) 的形式所成的群，T 适合 (6)，再添上适合于

$$TJ\bar{T}' = -J$$

的T，还有变形

$$(X_1^*, X_2^*) = (\bar{X}_1, \bar{X}_2).$$

这定理的证明从略，读者在了解了仿射几何的基本定理后,不难自己补出.

Фок 在较强的假定下,不必要地运用偏微分方程(波前方程),用了较高深的数学工具，获得同样的结论. 这群他称之为 Möbius 变换,即除去H方阵的仿射变换外,还有

$$x_i^* = [x_i - \alpha_i(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)]/[1 - 2(\alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3) + (\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)].$$

运用

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ \alpha_2 - i\alpha_3 & \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2} \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 & -\alpha_2 - i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & \alpha_0 + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

不难推出 Möbius 变换可以写成 (10) 的形式.

§ 13. 射影变换与因果关系

值得注意的是以下的特例：射影变换 (Möbius 变换)

$$X^* = X\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + I\right)^{-1}.$$

这变换把 0 变为 0，把 I 变为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 即把因果关系的原则破坏了. 更深刻些有以下的结果:

任何一个带有分母的变换 (10)，一定破坏因果关系. 先证明一个引理.

引理 命H是一给定的H方阵. 如果对任一适合于 $|X| > 0$ 的H方阵,常有 $|HX + I| > 0$, 则 $H = 0$.

证 不失去普遍性,可取 $H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$,$(\alpha \geqslant \beta, \alpha > 0)$.

我们说如果 $H \neq 0$,则可以找到一个 $X = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, $\xi\eta > 0$. 使

$$|XH + I| = (\alpha\xi + 1)(\beta\eta + 1) < 0.$$

若 (1) $\beta < 0$, 则取 ξ 为充分小正数, $\eta > \dfrac{1}{|\beta|}$ 就行了.

(2) $\beta = 0$, 则取 $\xi < -1/\alpha$, $\eta < 0$ 即得

(3) 如果 $\alpha \geqslant \beta > 0$, 则可取 $\varepsilon > 0$,

$$\xi = -\frac{1+\varepsilon}{\alpha}, \qquad \eta = -\frac{1-\varepsilon}{\beta},$$

使

$$\xi\eta = \frac{1-\varepsilon^2}{\alpha\beta} > 0,$$

而

$$\begin{aligned}&(\alpha\xi + 1)(\beta\eta + 1) \\ &\quad = [-(1+\varepsilon) + 1][-(1-\varepsilon) + 1] = -\varepsilon^2 < 0.\end{aligned}$$

现在我们证明

定理 1 非仿射变换的射影变换一定破坏因果关系.

证 假定这一变换把 X, Y 变为 X^*, Y^*, 则

$$X^* - Y^* = (XB + D)^{-1}(X - Y)(\bar{B}'Y + \bar{D}')^{-1}.$$

仿射变换可以把任一点变为 0. 我们不妨假定 $Y = Y^* = 0$. 因此 $C = 0$. 因而 $|D| \neq 0$. 上式变为

$$X^* = (XB + D)^{-1}X\bar{D}'^{-1}.$$

于是

$$|X^*| = |XB + D|^{-1}|\bar{D}'|^{-1}|X|$$
$$= |XB\bar{D}' + I|^{-1}|D\bar{D}'|^{-1}|X|.$$

由于 § 12 (9) 可知 BD^{-1} 是一 H 方阵，由引理即推出定理.

§ 14. 附　　记

1. 共形变换的度量. 在 § 12 (11) 中命 $Y \to X$，则得微分方阵逆变式

$$dX^* = (XB + D)^{-1}dX(\bar{B}'X + \bar{D}')^{-1}$$

取行列式，得

$$dx_0^{*2} - dx_1^{*2} - dx_2^{*2} - dx_3^{*2}$$
$$= \rho(x_0, x_1, x_2, x_3)^{-2}(dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2),$$

这儿 $\rho = |XB + D|$. 这是"共形"名称的来源.

2. 如果用假定 (A)，但把假定 (B) 减弱为

(B′): 通过任一观察点的光速不变，也就是光速不变的局部性.

也可以得出同样的结论来.

命仿射空间的速度矢量为 (v_1, v_2, v_3). 其变换规律是

$$x_i^* = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}x_j, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

于是

$$v_i^* = \frac{dx_i^*}{dx_0^*} = \frac{a_{i0} + \sum_{j=1}^{3} a_{ij}v_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^{3} a_{0j}v_j}, \qquad i = 1, 2, 3$$

即成一三维的射影空间．任一观察点，观察到光速不变也就是使

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=1 \tag{1}$$

不变（光速为1），使（1）不变也就是对所有的适合于（1）的 v_1，v_2，v_3 常有

$$\left(a_{00}+\sum_{j=1}^{3}a_{0j}v_j\right)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(a_{i0}+\sum_{j=1}^{3}a_{ij}v_j\right)^2. \tag{2}$$

取 $v_1=\pm1$，$v_2=v_3=0$，则得

$$(a_{00}\pm a_{01})^2=\sum_{i=1}^{3}(a_{i0}\pm a_{i1})^2.$$

取±号相加减得

$$a_{00}a_{01}=\sum_{i=1}^{3}a_{i0}a_{i1},$$

$$a_{00}^2+a_{01}^2=\sum_{i=1}^{3}(a_{i0}^2+a_{i1}^2)$$

同法可得

$$a_{00}a_{0j}=\sum_{i=1}^{3}a_{i0}a_{ij},\qquad j=2,3.$$

$$a_{00}^2+a_{0j}^2=\sum_{i=1}^{3}(a_{i0}^2+a_{ij}^2),\qquad j=2,3.$$

因之，得到

$$\begin{cases}-a_{0j}^2+\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ij}^2=a_{00}^2-\sum\limits_{i=1}^{3}a_{i0}^2=\rho, & j=1,2,3.\\ a_{00}a_{0j}-\sum\limits_{i=1}^{3}a_{i0}a_{ij}=0, & j=1,2,3.\end{cases}$$

即得

$$X^* = XL,$$

而 $L = L^{(4,4)}$ 适合于

$$L[1, -1, -1, -1]L' = \rho[1, -1, -1, -1].$$

3. 所有小于光速的矢量 (v_1, v_2, v_3) 成一空间

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < 1.$$

它的变换群就是 2 中所提到的群. 在第七讲中将讲二维的相仿的空间.

第六讲　非欧几何学

§ 1. 扩充空间的几何性质

前已说明我们所讨论的群G是由以下的变换所形成的:

$$y=\frac{xT+xx'v_1+v_2}{xu_2'+xx'b+d} \tag{1}$$

(同时有

$$yy'=\frac{xu_1'+xx'a+c}{xu_2'+xx'b+d}\Big). \tag{2}$$

记

$$M=\begin{pmatrix} T & u_1' & u_2' \\ v_1 & a & b \\ v_2 & c & d \end{pmatrix} \tag{3}$$

适合于

$$MJM'=J. \tag{4}$$

则齐次座标就是

$$(\xi^*, \eta_1^*, \eta_2^*)=\rho(\xi, \eta_1, \eta_2)M, \tag{5}$$

这儿M是使

$$\xi\xi'-\eta_1\eta_2=0$$

不变的变形，命 $\eta_1=s_1+s_2$，$\eta_2=-s_1+s_2$，则得

$$\xi\xi'+s_1^2-s_2^2=0.$$

以s_2除之，则得一个$n+1$维的单位球．因此，我们所研究的经过G群而扩充的n维的空间的研究与使$n+1$维空间的单位球不变的球面几何学是等价的，这种几何我们将来研究混合型偏微分方程再谈．

这就是把复平面与球面作对应的球面投影法的推广．

我们也已知在变形 G 下球分三类：实、点、虚．而且它们可以各变为以下的标准型：

(i) $xx'=1$（实球），

(ii) $xx'=0$（点球），

(iii) $xx'=-1$（虚球）．

固定一个球称为绝对，使这球不变的诸变换成一群以 H 表之，H 群下的几何学称为非欧几何学，对应于 (i)、(ii)、(iii) 分为三类几何学：双曲、抛物与椭圆．

为了引用 (4) 式方便起见，我们把它所包含的关系具体写出来：

$$TT'-\frac{1}{2}(u_1'u_2+u_2'u_1)=I^{(n)}, \tag{6}$$

$$Tv_1'-\frac{1}{2}(u_1'b+u_2'a)=0, \tag{7}$$

$$Tv_2'-\frac{1}{2}(u_1'd+u_2'c)=0, \tag{8}$$

$$v_1v_1'-ab=0, \tag{9}$$

$$v_1v_2'-\frac{1}{2}(ad+bc)=-\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$v_2v_2'-cd=0. \tag{11}$$

由 (4) 取逆，得到

$$M'J^{-1}M=J^{-1},\qquad J^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

即得

$$T'T-2(v_1'v_2+v_2'v_1)=I, \tag{12}$$

$$T'u_1'-2(v_1'c+v_2'a)=0, \tag{13}$$

$$T'u_2'-2(v_1'd+v_2'b)=0, \tag{14}$$

$$u_1u_1' - 4ac = 0, \tag{15}$$

$$u_1u_2' - 2(ad + bc) = -2, \tag{16}$$

$$u_2u_2' - 4bd = 0. \tag{17}$$

§2. 抛物几何学

这是使一个点球不变的群下所定义出来的几何学，不妨假定这点是 $x=\infty$，由 (1.1) 可知 $b=0$，再由 (1.9) 与 (1.17) 可知

$$v_1 = 0, \quad u_2 = 0. \tag{1}$$

再由 (1.6) 得

$$TT' = I. \tag{2}$$

由 (1.16), $ad=1$, 即

$$a = \frac{1}{d}.$$

再由 (1.8) 可知

$$u_1 = \frac{2}{d} v_2 T', \tag{3}$$

最后由 (1.15) 得

$$c = \frac{4}{d} v_2 v_2'. \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4) 完全决定了变形的形式，即

$$M = \begin{pmatrix} T & \frac{2}{d} T v_2' & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ v_2 & \frac{4}{d} v_2 v_2' & d \end{pmatrix},$$

即得抛物几何学中变形的一般形式

$$y = a(xT + v). \tag{5}$$

这是由旋转(及反演)

$$y = xT,$$

平移

$$y = x + v,$$

及放大(及缩小)

$$y = ax$$

所组成的.

抛物几何学的确定定义是:

空间: 所有的有限点.

群: 由旋转、反演、平移与放大所演出的群.

如果除去放大不论,这几何就是 n 维的欧几里得几何.

我们不深入讨论这种几何学.

§3. 椭圆几何学

虚球可以用矢量

$$(0; 1, 1)$$

表之. 我们的群是由适合于

$$(0; 1, 1) = \rho(0; 1, 1)M'$$

的方阵M所组成的.

换变数

$$\eta_1 = s_1 + s_2, \quad \eta_2 = -s_1 + s_2,$$

我们把M换成为N它使

$$N[1, 1, \cdots, 1, -1]N' = [1, \cdots, 1, -1], \qquad (1)$$

而矢量$(0; 1, 1)$变为$(s_1 = 0, s_2 = 1)$

$$(0; 0, 1),$$

即

$$(0, 0, \cdots, 0, 1)N = \rho(0, 0, \cdots, 0, 1).$$

因此

$$N = \begin{pmatrix} N_1^{(n+1)} & w_1' \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

由 (1) 得 $w_1 = 0$, $d = \pm 1$, 及
$$N_1 N_1' = I^{(n+1)},$$
这 N_1 就是 $n+1$ 行列的正交方阵.

因此,椭圆几何就是 $n+1$ 维球面上的几何学,它是在旋转、反演所造成的群 T 的几何学.

§4. 双曲几何学

矢量
$$(0, \cdots, 0; 1, -1)$$
代表单位球,我们的群是由适合于
$$(0, \cdots, 0, 1, -1) = \rho(0, 0, \cdots, 0, 1, -1)M'$$
的方阵M所组成的,也就是由适合于
$$u_1 = u_2 \tag{1}$$
及
$$a - b + c - d = 0 \tag{2}$$
的变形所组成的,这也可以从 (1.2) 中取 $xx' = yy' = 1$ 而推出.

命 $u_1 = u_2 = u$, 由 (1.6) 可知
$$TT' = I^{(n)} + u'u. \tag{3}$$
即 T 非奇异的,再由 (1.7)、(1.8) 得出
$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2}(a+b)uT'^{-1}, \\ v_2 = \dfrac{1}{2}(c+d)uT'^{-1}. \end{cases} \tag{4}$$

再由 (1.9) 及 (3) 可知
$$\frac{1}{4}(a+b)^2 uT'^{-1}T^{-1}u = ab,$$
即
$$(a+b)^2 u(I+u'u)^{-1}u' = 4ab,$$
$$(a+b)^2 uu'(1+uu')^{-1} = 4ab.$$

即得

$$(a-b)^2uu'=4ab. \tag{5}$$

同法从(1.10)与(1.11)得出

$$[(a-b)(c-d)+2]uu'=-2+2(ad+bc), \tag{6}$$

$$(c-d)^2uu'=4cd. \tag{7}$$

从(2),(5),(6),(7)解得

$$\begin{cases} a=d=\frac{1}{2}(\pm 1\pm\sqrt{1+uu'}), \\ b=c=\frac{1}{2}(\mp 1\pm\sqrt{1+uu'}). \end{cases} \tag{8}$$

$u=0$ 的情况是极易处理的,我们假定 $u\neq 0$,由于 $\pm M$ 代表同一变换,不妨假定 $a>0$,即

$$a=d=\frac{1}{2}(\pm 1+\sqrt{1+uu'}),$$

$$b=c=\frac{1}{2}(\mp 1+\sqrt{1+uu'}).$$

再由

$$1-yy'=\frac{(a-b)(1-xx')}{xu'+xx'b+a},$$

可知把单位球内部变为内部的变化是

$$a=d=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+uu'}),$$

$$b=c=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+uu'}), \tag{9}$$

也就是M中的元素必须适合(3),而 v_1, v_2, a, b, c, d 由(4)及(9)表出之.

这也不但算出了这一群的参变量 u 有 n 个,u 固定了,T 有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个,即一共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个参数 $\left(\text{正交方阵的参数等于 } \frac{1}{2}n(n-1)\right)$.

总之,群G内使单位球内部变为内部的变形可以写成为

$$y=\frac{xT+\frac{1}{2}(1+xx')\sqrt{1+uu'}\,uT'^{-1}}{xu'+\frac{1}{2}(1+xx')\sqrt{1+uu'}+\frac{1}{2}(1-xx')}. \tag{10}$$

由于

$$uT'^{-1}=u(I+u'u)^{-1}T=(1+uu')^{-1}uT,$$

故可以改写为

$$y=\frac{x+\frac{1}{2}(1+xx')(1+uu')^{-\frac{1}{2}}u}{xu'+\frac{1}{2}(1+xx')(1+uu')^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-xx')}T.$$

使0点不变的变形是$u=0$的变形,即

$$y=xT,\quad TT'=I, \tag{11}$$

因此,一般的变形确是由第一章中所讲到的变形所演出的.因为任何变换可能把u变为0,由第一章中的变换能把a变为0,因此,只须考虑把0变为0的变换的一般形式即足,而它确是(10),也是第一章中所提起过的.

§5. 测 地 线

定理1 过任两点有一而且唯一的一条测地线. 具体地讲,命x_0, x_0^*是两点,则沿测地线的积分

$$\int_{x_0}^{x_0^*}\frac{\sqrt{dxdx'}}{1-xx'}$$

最短,其他的都大于它.

证 不失普遍性,可取$x_0=0$及$x_0^*=(\delta,0,\cdots,0)$,因为由可递性不妨假定$x_0=0$,又行一旋转可以假定$x_0^*=(\delta,0,\cdots,0)$.

命

$$x = x(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是联这两点的曲线,即

$$x(0) = 0, \quad x(1) = (\delta, 0, \cdots, 0),$$

则积分等于

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}}{1 - x_1^2 \cdots - x_n^2} dt \geqslant \int_0^1 \frac{\frac{dx_1}{dt}}{1 - x_1^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + x_1(t)}{1 - x_1(t)} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta}{1 - \delta}.$$

即得所证.

第七讲　混合型偏微分方程

从二维出发，但熟悉线性代数的读者可以直接推到高维.

§1. 实射影平面

还是从单位圆开始，先研究使单位圆不变的射影变换.

我们所讨论的群是由使

$$x^2+y^2<1 \tag{1}$$

变为其自己的射影变换

$$x_1=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_3y+c_3},\quad y_1=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3} \tag{2}$$

所组成的，也就是方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

是满秩的，而且是适合于

$$A'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}A=\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

的，由于(2)的齐次性，不妨假定 $\rho=\pm 1$，再取(3)的行列式，易见 $\rho=1$，今后我们常假定 $\rho=1$.

这个群记作 Γ，是由以下的一些元素所演成的：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos h\psi & \sin h\psi \\ 0 & \sin h\psi & \cos h\psi \end{pmatrix}$$

称为旋转、反射与双曲旋转．或者更具体些，它们可以写成为

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y_1 = -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = -y. \end{cases} \tag{5}$$

及对实数 $\mu(-1 < \mu < 1)$,

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1-\mu^2}\, x/(1-\mu y), \\ y_1 = (y-\mu)/(1-\mu y), \end{cases} \tag{6}$$

或

$$\begin{cases} x_1 = x/(y\sin h\phi + \cos h\phi), \\ y_1 = (y\cos h\phi + \sin h\phi)/(y\sin h\phi + \cos h\phi). \end{cases}$$

现在来证明这一点，在 A 的左右各乘以一个类型 (4) 的方阵，可以使 $b_1 = a_2 = 0$，如此便不难推出 A 成为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

这显然是 (5) 与 (6) 的乘积．

在群 Γ 之下，圆内一点可以变为其中的任一点，要证明这点并不困难，首先经过旋转任一点可以变为 $(0,\lambda)$, $(\lambda > 0)$. 当 $\lambda < 1$ 时，可以由 (6) 变为 $(0,0)$（实质上，圆外之点也成一可递集合）．

我们现在研究群 Γ 下的微分不变量，联两点 (x,y), $(x + dx, y + dy)$ 的直线是

$$(x + \lambda dx, y + \lambda dy),$$

这直线与单位圆的交点，可由

$$(x + \lambda dx)^2 + (y + \lambda dy)^2 = 1$$

来决定，即

$$\lambda^2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda(xdx + ydy) + x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

这式子的判别式是

$$(xdx + ydy)^2 - (dx^2 + dy^2)(x^2 + y^2 - 1),$$

即

$$(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2.$$

这建议了这微分二次型可能是一个共变量，实际计算，这的确是一个共变量，而且

$$\frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \tag{A}$$

是一个不变量.

这一性质当然可以从交比推出（即由二点及与圆的二交点的交比推出），但也可以直接证之如下：

(A) 的分子等于

$$dx^2 + dy^2 - (ydx - xdy)^2,$$

这显然是经旋转与反射而不变的，现在进一步证明，它经(6)而共变，

$$dx_1 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{1 - \mu y} dx + \frac{\mu\sqrt{1 - \mu^2}}{(1 - \mu y)^2} xdy,$$

$$dy_1 = \frac{1 - \mu^2}{(1 - \mu y)^2} dy.$$

显然可见，

$$\begin{aligned} dx_1^2 + dy_1^2 - (x_1dy_1 - y_1dx_1)^2 &= \frac{1}{(1 - \mu y)^4}[(1 - \mu^2) \\ &\quad \times \{(1 - \mu y)dx + \mu xdy\}^2 + (1 - \mu^2)^2dy^2] \\ &\quad - \frac{1 - \mu^2}{(1 - \mu y)^6}[x(1 - \mu^2)dy - (y - \mu) \\ &\quad \times \{(1 - \mu y)dx + \mu xdy\}]^2 \\ &= \frac{1 - \mu^2}{(1 - \mu y)^4}[\{(1 - \mu y)dx + \mu xdy\}^2 \\ &\quad + (1 - \mu^2)dy^2 - \{xdy - (y - \mu)dx\}^2] \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-\mu^2)^2}{(1-\mu y)^4}[(1-y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1-x^2)dy^2], \tag{7}$$

而另一方面，

$$1 - x_1^2 - y_1^2 = 1 - \frac{1}{(1-\mu y)^2}[(1-\mu^2)x^2 + (y-\mu)^2]$$

$$= \frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}(1-x^2-y^2). \tag{8}$$

所以得到

$$\frac{(1-y_1^2)dx_1^2 + 2x_1y_1dx_1dy_1 + (1-x_1^2)dx_1^2}{(1-x_1^2-y_1^2)^2}$$

$$= \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1-x^2)dx^2}{(1-x^2-y^2)^2}. \tag{9}$$

这微分不变式作为我们的 Riemann 度量.

§2. 偏微分方程

与(A)"对偶"的有以下的二阶偏微分算子

$$\Delta u = (1-x^2-y^2)\left[(1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}\right]u. \tag{B}$$

这也是经 Γ 而不变的.

要证明这一点有两种方法.一种是把(A)看成为 Riemann 度量,这一 Riemann 空间的 Lame′ 算子(或 Bertrami 算子)就是(B), 因而由一般性的定理,得出这一性质. 计算也是冗长的,反而不如直接代入的简捷, 我们现在用直接代入法, 易证这算子是经 § 1 的变换 (4), (5) 而不变的,现在证明,它也经 § 1 的 (6) 而不变,现在有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mu x\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^2}+\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}.$$

因此得出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\mu(1-\mu^2)x}{(1-\mu y)^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\frac{(1-\mu^2)^{3/2}}{(1-\mu y)^3}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^2},$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\mu^2(1-\mu^2)x^2}{(1-\mu y)^4}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\frac{\mu x(1-\mu^2)^{3/2}}{(1-\mu y)^4}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{(1-\mu^2)^2}{(1-\mu y)^4}+2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mu^2 x\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^3}$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\mu(1-\mu^2)}{(1-\mu y)^3},$$

因此,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$-2y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left[(1-x^2)\frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{2\mu(1-\mu^2)x^2y}{(1-\mu y)^3}+(1-y^2)\frac{\mu^2x^2(1-\mu^2)}{(1-\mu y)^4}\right]$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\left[-\frac{(1-\mu^2)^{3/2}xy}{(1-\mu y)^3}+\frac{\mu(1-\mu^2)^{3/2}}{(1-\mu y)^4}(1-y^2)\right]$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}(1-y)^2\frac{(1-\mu^2)^2}{(1-\mu y)^4}-2\frac{\partial u}{\partial x_1}\left[\frac{xy\mu\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^2}\right.$$
$$-\frac{\mu^2x^2\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^3}(1-y^2)+x\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu y}$$

$$+ y\frac{\mu x\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\mu y)^2}\Bigg] - 2\frac{\partial u}{\partial y_1}\left[-\frac{(1-\mu^2)\mu}{(1-\mu y)^3}(1-y^2)\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\mu^2)y}{(1-\mu y)^2}\right] = \frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right.$$

$$\times\left[1-x^2-\frac{2\mu y x^2}{1-\mu y}+(1-y^2)\frac{\mu^2 x^2}{(1-\mu y)^2}\right]$$

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\left[\frac{(1-\mu^2)^{1/2}x}{1-\mu y}\left(y-\frac{\mu(1-y^2)}{1-\mu y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{(1-y^2)(1-\mu^2)}{(1-\mu y)^2}-2\frac{\partial u}{\partial x_1}(1-\mu^2)^{-1/2}x$$

$$\times\left[(1-\mu y)+2\mu y-\frac{\mu^2(1-y^2)}{1-\mu y}\right]$$

$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial y_1}\left[y-\frac{\mu}{1-\mu y}(1-y^2)\right]\right\} = \frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}$$

$$\times\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(1-\frac{(1-\mu^2)x^2}{(1-\mu y)^2}\right)-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\right.$$

$$\times\frac{(1-\mu^2)^{1/2}x(y-\mu)}{(1-\mu y)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\left[1-\left(\frac{y-\mu}{1-\mu y}\right)^2\right]$$

$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{(1-\mu^2)^{1/2}x}{1-\mu y}-2\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{y-\mu}{1-\mu y}\right\}$$

$$=\frac{1-\mu^2}{(1-\mu y)^2}\left\{(1-x_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-2x_1y_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_1}\right.$$

$$\left.+(1-y_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}-2y\frac{\partial u}{\partial y_1}\right\}. \tag{1}$$

又由 § 1 (8), 可得 (B) 的不变性.

注意这变形的 Jacobian 是

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu y}\right)^3.$$

在单独考虑又带因子 $(1-x^2-y^2)$ 的 (A) 与 (B) 时, 我们必须注意, 所写出的共变因子是 Jacobian 的非整数乘方指数, 而

偏微分方程

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-2\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{C}$$

是以(A)为特征线的偏微分方程,其特征线是单位圆的切线.

这个方程是混合型的,在单位圆内是椭圆型,在单位圆外是双曲型,单位圆是变形线.

在射影变换之下,单位圆是等价于任何非奇异实二次曲线的,所以实际上我们处理了任何以非奇异二次曲线的变形线的一个问题.

这方程的极座标形式是

$$(1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\left(\frac{1}{\rho}-2\rho\right)\frac{\partial u}{\partial \rho}=0, \tag{D}$$

也可以写成为

$$\rho|1-\rho^2|^{1/2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho(1-\rho^2)}{|1-\rho^2|^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

命 $\mathscr{D}$ 是射影平面上的一个域，如果一个函数 $u=u(x,y)$ 在 $\mathscr{D}$ 上适合于偏微分方程(C)或(D)，则 $u(x,y)$ 可以称为 $\mathscr{D}$ 上的调和函数. 关于 $u(x,y)$ 的一些应有的附加条件以后再说.

Lame' 算子的来源是求曲线座标的位函数,因此,这样概念的引进是极自然的.

如果 $\mathscr{D}$ 在单位圆内,即就得出通常的椭圆型方程. 如果 $\mathscr{D}$ 全在圆外,那就是普通的双曲型偏微分方程. 我们现在集中注意于 $\mathscr{D}$ 的一部分在圆内另一部分在圆外的情况,也就是讨论混合型偏微分方程的问题.

§3. 特 征 线

微分方程

$$(1-y^2)dx^2+2xydxdy+(1-x^2)dy^2=0 \tag{1}$$

的解称为特征线，我们现在来解出这个微分方程式。

$x=1$ 显然是 (1) 的一个解，这是单位圆的一条切线，经过群 Γ 就得出单位圆的所有的切线。因此，单位圆的所有的切线都适合于微分方程 (1)，它们也就是 (1) 的通解，而单位圆是这方程的奇解。

单位圆的切线是特征线，而这些特征线的包络线也就是这单位圆。

特征线的一般形式是

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1,$$

即得

$$y^2(1-\cos^2\alpha)=(1-x\cos\alpha)^2,$$

$$(x^2+y^2)\cos^2\alpha-2x\cos\alpha+1-y^2=0,$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{x\pm\sqrt{x^2-(x^2+y^2)(1-y^2)}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x\pm y\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}.$$

因而推出方程 (C) 有如下形式的通解

$$u(x,y)=f_1\left(\frac{x+y\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\right)+f_2\left(\frac{x-y\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\right),$$

此处 f_1 与 f_2 是两个任意函数，在极座标时，通解形式是

$$g_1\left(\theta+\cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)+g_2\left(\theta-\cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right).$$

如果

$$u(x, y)$$

是方程 (C) 的一个解，则

$$u(x\cos\phi + y\sin\phi, -x\sin\phi + y\cos\phi)$$

也是一个解，因而

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x\cos\phi + y\sin\phi, -x\sin\phi + y\cos\phi)d\phi$$

也是一个解，这样的解显然是经过旋转而不变的，这一函数显然仅是 ρ 的函数，而与 θ 无关．先考虑这样的解，由 (D) 得

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho(1-\rho^2)}{|1-\rho^2|^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = 0, \quad \frac{\rho(1-\rho^2)}{|1-\rho^2|^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial\rho} = C_1,$$

$$u = \begin{cases} C_1 \log\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} + C_2, & \text{当 } \rho \leqslant 1, \\ C_1 \arccos\dfrac{1}{\rho} + C_2, & \text{当 } \rho > 1. \end{cases}$$

§4. 这偏微分方程与 Лаврентьев 方程的关系

在极座标方程

$$\rho^2(1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho(1-2\rho^2)\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \qquad \text{(D)}$$

中换变数 $\xi = f(\rho)$，如此则得

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial\xi}f'(\rho), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}f'^2(\rho) + \frac{\partial u}{\partial\xi}f''(\rho),$$

代入 (D) 式得

$$\rho^2(1-\rho^2)f'^2(\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + [\rho^2(1-\rho^2)f''(\rho)$$

$$+ \rho(1-2\rho^2)f'(\rho)]\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0.$$

我们取 $f(\rho)$ 使

$$\rho^2|1-\rho^2|(f'(\rho))^2=1. \tag{1}$$

微分此式得

$$2f'(\rho)f''(\rho)\rho^2|1-\rho^2|+\{2\rho|1-\rho^2| \\ -2\rho^2\operatorname{sgn}(1-\rho^2)\rho\}f'^2(\rho)=0,$$

即

$$\rho^2(1-\rho^2)f''(\rho)+\rho(1-2\rho^2)f'(\rho)=0. \tag{2}$$

如果 $f(\rho)$ 适合于(1), 则(D)式变为

$$\rho^2(1-\rho^2)f'^2(\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,$$

即

$$\operatorname{sgn}(1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{3}$$

因此,我们现在来解(1)式,即取 $\xi=f(\rho)$ 使

$$\frac{d\xi}{d\rho}=-\frac{1}{\rho|1-\rho^2|^{1/2}},$$

解得

$$\xi=\begin{cases}\log\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}+C, & \text{当 } \rho<1,\\ -\arccos\dfrac{1}{\rho}+C', & \text{当 } \rho>1.\end{cases}$$

取 $C=C'=0$, 即得变形

$$\xi=\begin{cases}\cosh^{-1}\dfrac{1}{\rho}, & \text{当 } 0\leqslant\rho\leqslant 1,\\ -\cos^{-1}\dfrac{1}{\rho}, & \text{当 } \rho\geqslant 1.\end{cases} \tag{E}$$

这变形是连续的,而且变化的情况是

ρ	0		1		∞
ξ	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

经这样的变换后,所考虑的偏微分方程就变为

$$\operatorname{sgn}\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,$$

此处$-\frac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant\infty$及$-\pi<\theta\leqslant\pi$.

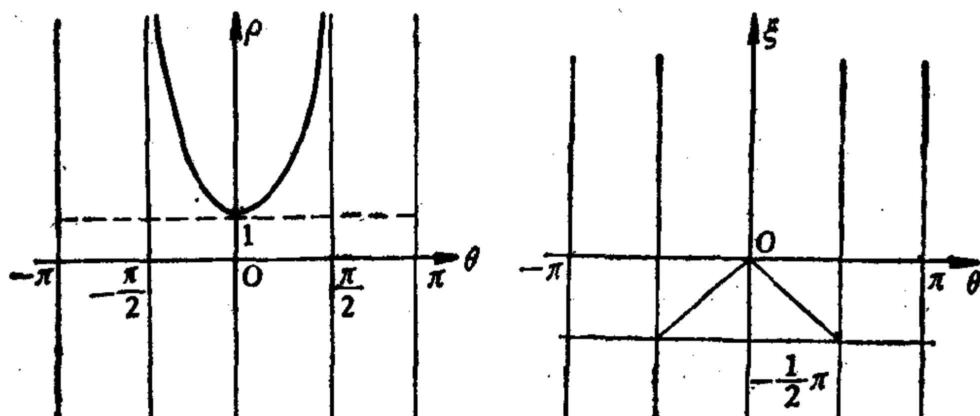
由(E)得

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{1}{\cosh\xi}, & 当\ \xi\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\cos\xi}, & 当\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant 0.\end{cases}\tag{E'}$$

这一变换是连续的,而且有一级连续微商,但是它的二级微商在$\xi=0$时不连续.

这也指明了在研究 Лаврентьев 方程的时候,在变形线上不能假定有二阶连续微商的道理.

如果把(ρ,θ)及(ξ,θ)都看成为垂直座标,则得下图.



在(ρ,θ)平面上所考虑的区域是$\rho>0$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$的半条形,适合于$0<\rho\leqslant 1$的部分是椭圆区,而适合于$\rho>1$的部分是双曲区,所画的U形曲线是一条特征线. 其它的特征线可由此线水平移动得来. 但须注意,我们把二直线$\theta=\pi$与$\theta=-\pi$等同起来,在(ξ,θ)平面上,所考虑的区域点$-\frac{1}{2}\pi<\xi$及$-\pi<\theta\leqslant\pi$,其中$\xi<0$的部分是双曲区,所

画出的Λ形曲线是特征线之一，其它可由水平移动得来。

§5. 分离变数法

现在研究方程

$$\rho^2(1-\rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\rho(1-2\rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \qquad \text{(D)}$$

形如$u=\varphi(\rho)\psi(\theta)$的解，如此则

$$\frac{\rho^2(1-\rho^2)\varphi''(\rho)+\rho(1-2\rho^2)\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}=-\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}. \qquad (1)$$

由于θ的周期性可知

$$-\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}=n^2, \qquad (2)$$

此处n是整数而得出$\psi(\theta)=\cos n\theta$或$\sin n\theta$.

由(1)及(2)得出

$$\rho^2(1-\rho^2)\varphi''+\rho(1-2\rho^2)\varphi'-n^2\varphi=0. \qquad (3)$$

命$\varphi=\rho^{-n}\Phi$，得

$$\rho^2(1-\rho^2)(\rho^{-n}\Phi''-2n\rho^{-n-1}\Phi'+n(n+1)\rho^{-n-2}\Phi)$$
$$+\rho(1-2\rho^2)(\rho^{-n}\Phi'-n\rho^{-n-1}\Phi)-n^2\rho^{-n}\Phi=0,$$

即

$$\rho(1-\rho^2)\Phi''-(2n-1-2(n-1)\rho^2)\Phi'$$
$$-n(n-1)\rho\Phi=0. \qquad (4)$$

再命

$$\tau=1-\rho^2, \qquad (5)$$

则得

$$\rho\tau\left(4\rho^2\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}-2\frac{d\Phi}{d\tau}\right)+2\rho[1+2(n-1)\tau]\frac{d\Phi}{d\tau}$$
$$-n(n-1)\rho\Phi=0,$$

即

$$4\tau(1-\tau)\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}+2[1+2(n-1)\tau-\tau]\frac{d\Phi}{d\tau}$$
$$-n(n-1)\Phi=0, \qquad (6)$$

这是一个超几何微分方程，它的解一般用

$$F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}, \tau\right)$$

表之，但对这个特殊的方程，我们可以直接验算这方程有以下的两个解

$$(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n, \quad (1-\tau^{\frac{1}{2}})^n. \tag{7}$$

例如，前者的第一第二阶微商各为

$$\frac{d}{d\tau}(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n = \frac{1}{2}n(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-1}\tau^{-\frac{1}{2}}$$

及

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n = \frac{1}{4}n(n-1)(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-2}\tau^{-1}$$
$$-\frac{1}{4}n(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-1}\tau^{-\frac{3}{2}},$$

代入(6)式即得

$$\begin{aligned}
&(1-\tau)[n(n-1)(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-2} - n(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-1}\tau^{-\frac{1}{2}}]\\
&\quad + [1+2(n-1)\tau-\tau]n(1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-1}\tau^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad - n(n-1)(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n\\
&= (1+\tau^{\frac{1}{2}})^{n-2}[n(n-1)(1-\tau)\\
&\quad - n(1+\tau^{-\frac{1}{2}})(1-\tau) + n(1+2(n-1)\tau-\tau)\\
&\quad \times(1+\tau^{-\frac{1}{2}}) - n(n-1)(1+\tau+2\tau^{\frac{1}{2}})] = 0.
\end{aligned}$$

但(7)所给的两个解并不常是实的，为了研究实解答，我们用以下的两个实解：

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2}[(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n + (1-\tau^{\frac{1}{2}})^n] \tag{8}$$

及

$$|\tau|^{\frac{1}{2}}Q_n(\tau), \tag{9}$$

此处 $Q_n(\tau) = \frac{1}{2\tau^{1/2}}((1+\tau^{\frac{1}{2}})^n - (1-\tau^{\frac{1}{2}})^n)$，我们取

$$\tau^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |\tau|^{\frac{1}{2}}, & 若\ \tau > 0, \\ i|\tau|^{\frac{1}{2}}, & 若\ \tau < 0. \end{cases}$$

所以方程(D)有如下形式的一些解:

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}\cos n\theta,\ \frac{P_n(\tau)}{\rho^n}\sin n\theta,\ |\tau|^{\frac{1}{2}}\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\cos n\theta,$$

$$|\tau|^{\frac{1}{2}}\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\sin n\theta,$$

此处 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$.

当 $n = 0$ 时,以上的处理方法必须补充,由(1)得

$$\rho^2(1-\rho^2)\varphi''(\rho) + \rho(1-2\rho^2)\varphi'(\rho) = 0, \psi''(\theta) = 0.$$

前式即

$$\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi'(\rho)} = \frac{2\rho^2-1}{\rho(1-\rho^2)} = -\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho},$$

所以

$$\varphi'(\rho) = -C_1\frac{|\tau|^{\frac{1}{2}}}{\rho\tau},$$

即

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} C_1 \log\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} + C_2, & 当\ \rho < 1, \\ -C_1 \arccos\dfrac{1}{\rho} + C_2, & 当\ \rho > 1. \end{cases}$$

(假定了 $\varphi(\rho)$ 在 $\rho = 1$ 连续),同时 $\psi(\theta) = C_3\theta + C_4$. 由于 $u(\rho, \theta)$ 是 θ 的以 2π 为周期的函数,所以 $C_3 = 0$. 命

$$\sigma(\rho) = \begin{cases} \log\dfrac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, & 当\ \rho < 1, \\ \arccos\dfrac{1}{\rho}, & 当\ \rho > 1. \end{cases}$$

如此则

$$\lim_{\rho\to 1\pm 0}\frac{\sigma(\rho)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

这建议了微分方程(D)有以下形式的解答

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \times \frac{P_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$+ c_0\sigma(\rho) + |\tau|^{\frac{1}{2}} \times \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}. \quad \text{(F)}$$

现在暂不讨论(F)的收敛问题及其是否适合于(D)的问题,而先虚瞰一下,由(F)建议出些什么来.

首先我们应当肯定讨论那一类的函数, 由(F)的形式可以看出,当 $\rho = 1$ 时, 我们必须减弱条件, 也就是我们不能假定 $u(\rho, \theta)$ 的微商在 $\rho = 1$ 处存在,但应当假定

$$\lim_{\rho\to 1-0} \frac{u(\rho, \theta) - u(1, \theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = \lim_{\rho\to 1+0} \frac{u(\rho, \theta) - u(1, \theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

存在.

切实些说,我们所研究的函数类如下:

给一个区域 D, 其中包有一段单位圆,当 $\rho \neq 1$ 时, 函数 $u(\rho, \theta)$ 有二阶偏微商,但当 $\rho = 1$ 时,我们假定适合于(10).

如果我们限定所考虑的函数是实解析的, 则(F)的第二部分不存在,因而也没有必要假定条件(10)了.

§ 6. 问题的提出(虚瞰)

首先,在单位圆(变型线)上级数(F)的情况,我们有

$$u(1,\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$= \varphi(\theta). \quad \text{(定义)} \quad (1)$$

这建议了: 如果仅仅给了单位圆上的数值(即 $u(1, \theta) = \varphi(\theta)$), 方程(D)的解答并不唯一,因为对任何的 c_n, d_n, (F)

在单位圆上都有相同的值，而且都是(D)的解答。

这也建议了，我们应当考虑适合以下条件的函数：极限

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{u(\rho,\theta)-\varphi(\theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

存在，即

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{u(\rho,\theta)-\varphi(\theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}}=\lim_{\tau\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)Q_n(\tau)$$

$$+c_0\lim_{\rho\to\pm 0}\frac{\sigma(\rho)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}n(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)$$

$$+c_0=\chi(\theta)\quad(\text{定义})$$

问题I 给了两个函数 $\varphi(\theta)$ 与 $\chi(\theta)$，以 2π 为周期，在什么条件下，则有一个且仅有一个函数 $u(\rho,\theta)$ 适合于(D)(单位圆除外，但在单位圆上连续)而且

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\varphi(\theta) \tag{3}$$

及

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{u(\rho,\theta)-\varphi(\theta)}{|\tau|^{1/2}}=\chi(\theta). \tag{4}$$

如果 $\varphi(\theta)$ 与 $\chi(\theta)$ 的 Fourier 级数各为

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{5}$$

及

$$\chi(\theta)=\frac{1}{2}\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n\cos n\theta+\delta_n\sin n\theta), \tag{6}$$

则解答就是

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_0\sigma(\rho)+|\tau|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\gamma_n\cos n\theta+\delta_n\sin n\theta)\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}. \tag{7}$$

如果假定解答是实解析的，则条件(3)就有希望唯一决

定（D）的解了．

其次，考虑在特征线上的情况，取特征线 $x=1$，即

$$\rho\cos\theta=1,\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

现在

$$\begin{aligned}\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{2}((\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n)\\&=\cos n\theta.\end{aligned}$$

同样，我们有

$$|\tau|^{\frac{1}{2}}\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}=\sin n\theta$$

及

$$\sigma(\rho)=\theta.$$

因此得到

$$\begin{aligned}u\left(\frac{1}{\cos\theta},\theta\right)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\cos n\theta\\&\quad+c_0\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)\sin n\theta\\&=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(1+\cos 2n\theta)+b_n\sin 2n\theta]\\&\quad+c_0\theta+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[c_n\sin 2n\theta+d_n(1-\cos 2n\theta)]\\&=\frac{1}{2}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+d_n)\right]+c_0\theta+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\\&\quad\times[(a_n-d_n)\cos 2n\theta+(b_n+c_n)\sin 2n\theta]\\&=\tau(\theta).\ (\text{定义})\end{aligned}\tag{8}$$

由

$$u(1,0)=\varphi(0)=\tau(0),\tag{9}$$

可以推出以下的问题.

问题 II 给了两个函数 $\varphi(\theta)$ 与 $\tau(\theta)$, $\varphi(\theta)$ 与 $\tau(\theta)$ 各以 2π 及 π 为周期, 而且 $\varphi(0)=\tau(0)$. 在怎样的条件下, 有函数 $u(\rho,\theta)$ 存在适合于 (D) (单位圆上仍有如前的假定)而且

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\varphi(\theta), \quad u(\rho,\theta)|_{x=1}=\tau(\theta).$$

如果 $\varphi(\theta)$ 有 Fourier 展开式 (6) 及 $\tau(\theta)$ 有 Fourier 展开式

$$\tau(\theta)=\frac{1}{2}\alpha_0+\gamma_0\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos 2n\theta+\beta_n\sin 2n\theta) \tag{10}$$

及

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n,$$

则解答应当是

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta)=&\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}\\ &+\gamma_0\sigma(\rho)+|\tau|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}[(2\beta_n-b_n)\cos n\theta\\ &-(2\alpha_n-a_n)\sin n\theta]\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}. \end{aligned} \tag{11}$$

再考虑圆内的情况,我们引进新变数

$$\lambda=\frac{1}{\rho}-\sqrt{\frac{1}{\rho^2}-1}=\frac{1-\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}=\frac{\rho}{1+\tau^{\frac{1}{2}}}. \tag{12}$$

在这变换下,把微分方程 (D) 变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

这恰好就是 Laplace 方程的极座标形式,由于

$$\frac{d\lambda}{d\rho}=\frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2\sqrt{1-\rho^2}}\geqslant 0,$$

当 ρ 由 0 变到 1 时，λ 也由 0 变到 1，并且对应是 1-1 的，这样便有

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}=\frac{1}{2\rho^n}[(1+\tau^{\frac{1}{2}})^n+(1-\tau^{\frac{1}{2}})^n]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n+\left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n\right]$$

$$=\frac{\lambda^n+\lambda^{-n}}{2},\quad |\tau|^{\frac{1}{2}}\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n-\left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n\right]=\frac{-\lambda^n+\lambda^{-n}}{2},$$

及 $\sigma(\rho)=\log\lambda$.

所以

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)(\lambda^n+\lambda^{-n})$$

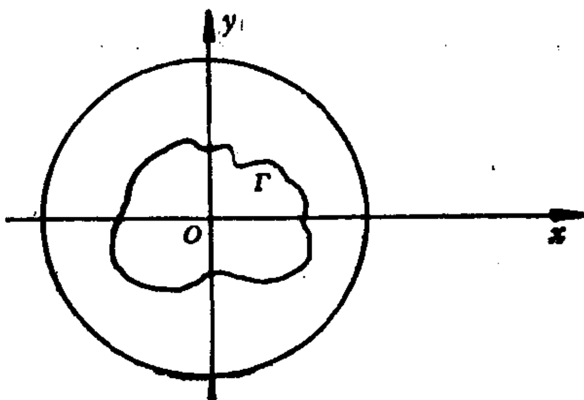
$$+c_0\log\lambda+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)(-\lambda^n+\lambda^{-n})$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+c_n)\cos n\theta+(b_n+d_n)\sin n\theta]\lambda^{-n}$$

$$+c_0\log\lambda+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-c_n)\cos n\theta$$

$$+(b_n-d_n)\sin n\theta]\lambda^n=U(\lambda,\theta),\tag{13}$$

这儿 $U(\lambda,\theta)$ 是一个在环状域内的普通的单值调和函数，这也就是一个环状域的解析函数的实数部分，因而建议了



问题 III 在变型线(单位圆)上及圆内一闭曲线 Γ 上给了 $u(\rho,\theta)$ 的函数值：

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\varphi(\theta),$$
$$u(\rho,\theta)|_{\Gamma}=\psi(\theta), \tag{14}$$

则(D)的解是存在而且唯一的.

特别Γ是同心圆有

问题IV 给了

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\Phi(\theta),$$
$$u(\rho,\theta)|_{\rho=\rho_0}=\Psi(\theta),\quad 0<\rho_0<1$$

求$u(\rho,\theta)$.

有以下的处理方法.

在极座标(λ,θ)的平面上考虑问题,假定Γ是以λ_0为半径,原点为中心的圆. 在$0<\lambda_0<\lambda<1$中考虑函数

$$W(\lambda,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(\theta-\psi)+\lambda^2}\Phi(\psi)d\psi$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2-2\lambda\lambda_0\cos(\theta-\psi)+\lambda_0^2}\Psi(\psi)d\psi+\gamma\log\lambda. \tag{15}$$

此处$\Phi(\psi)$与$\Psi(\psi)$可以有以下的 Fourier 级数表出的函数

$$\begin{cases}\Phi(\theta)=\dfrac{1}{2}\alpha_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta),\\ \Psi(\theta)=\dfrac{1}{2}\gamma_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\gamma_n\cos n\theta+\delta_n\sin n\theta).\end{cases} \tag{16}$$

把 Poisson 核展开逐项求积分可得

$$W(\lambda,\theta)=\frac{1}{2}(\alpha_0+\gamma_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)\lambda^n$$
$$+\gamma\log\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n\cos n\theta+\delta_n\sin n\theta)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n. \tag{17}$$

当$\lambda\to1$及$\lambda\to\lambda_0$,则各得

$$W(\lambda,\theta)|_{\lambda=1}=\frac{1}{2}(\alpha_0+\gamma_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(\alpha_n+\lambda_0^n\gamma_n)\cos n\theta$$

$$+ (\beta_n + \lambda_0^n \delta_n) \sin n\theta]. \tag{18}$$

$$W(\lambda, \theta)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \gamma_0) + \gamma \log\lambda_0 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n \lambda_0^n + \gamma_n)\cos n\theta + (\beta_n \lambda_0^n + \delta_n) \sin n\theta]. \tag{19}$$

把(17)换为(ρ, θ)符号，则得函数

$$u(\rho, \theta) = W(\lambda, \theta) = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \gamma_0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \left[\frac{P_n(\tau)}{\rho^n} + |\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\right]$$

$$+ \gamma\sigma(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos n\theta + \delta_n \sin n\theta)\lambda_0^n \left[\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}\right.$$

$$\left. - |\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\right] = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \gamma_0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n + \gamma_n \lambda_0^n) \cos n\theta + (\beta_n + \delta_n \lambda_0^n) \sin n\theta] \frac{P_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$+ \gamma\sigma(\rho) + |\tau|^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n - \gamma_n \lambda_0^n) \cos n\theta + (\beta_n - \delta_n \lambda_0^n) \sin n\theta] \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}. \tag{20}$$

如果(14)所给的函数的 Fourier 级数是

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta). \tag{21}$$

与(18)、(19)比较便得

$$\alpha_0 + \gamma_0 = a_0, \quad \alpha_n + \lambda_0^n \gamma_n = a_n, \quad \beta_n + \lambda_0^n \delta_n = b_n,$$

$$\alpha_0 + \gamma_0 + 2\gamma \log \lambda_0 = c_0, \quad \alpha_n \lambda_0^n + \gamma_n = c_n,$$

$$\beta_n \lambda_0^n + \delta_n = d_n.$$

代入(20),我们可以希望问题 IV 的解的形式是:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$+\frac{c_0-a_0}{2\log\lambda}\sigma(\rho)+|\tau|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\lambda_0^{2n}}{1-\lambda_0^{2n}}a_n-\frac{2\lambda_0^n}{1-\lambda_0^{2n}}c_n\right)\right.$$

$$\left.\times\cos n\theta+\left[\left(\frac{1+\lambda_0^{2n}}{1-\lambda_0^{2n}}b_n-\frac{2\lambda_0^n}{1-\lambda_0^{2n}}d_n\right)\sin n\theta\right]\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\right.$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\frac{Pn(\tau)}{\rho^n}+\frac{1}{2}(c_0-a_0)$$

$$\times\frac{\sigma(\rho)}{\sigma(\rho_0)}+\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-P_n(\tau_0)a_n+c_n\rho_0^n}{Q_n(\tau_0)}\right)\cos n\theta\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-P_n(\tau_0)b_n+d_n\rho_0^n}{Q_n(\tau_0)}\right)\sin n\theta\right]\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n},$$

此处 ρ_0, τ_0 是当 $\lambda=\lambda_0$ 时 ρ 与 τ 的值.

问题 V (Tricomi) 命 Γ 是圆内的一条闭曲线,假定在 Γ 上及一条特征线(例如 $x=1$)上给了函数值,则(D)的解答是唯一的.

我们还是取 Γ 是一个同心圆的情况,假定

$$u(\rho,\theta)|_\Gamma=\phi(\theta),\quad u(\rho,\theta)|_{x=1}=\tau(\theta).$$

为了解决这问题,我们把问题 II 及 IV 的解等同起来,先假定有

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\varphi(\theta).$$

比较(11)与(22)可知

$$\gamma_0=\frac{c_0-a_0}{2\log\lambda_0},\quad 2\beta_n-b_n=\frac{(1+\lambda_0^{2n})a_n-2\lambda_0^nc_n}{1-\lambda_0^{2n}},$$

$$-2\alpha_n+a_n=\frac{(1+\lambda_0^{2n})b_n-2\lambda_0^nd_n}{1-\lambda_0^{2n}}.$$

由此解出 a_0, a_n, b_n, 代入(11)式即得所求.

问题 VI 假定了

$$u(\rho, \theta)|_{\rho=\rho_0} = \psi(\theta), \quad u(\rho, \theta)|_{x=1} = \tau(\theta)$$

而求解.

在(F)中代入以上的条件得出

$$u(\rho,\theta)|_{x=1} = \frac{1}{2}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + d_n)\right] + c_0\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - d_n)\cos 2n\theta + (b_n + c_n)\sin 2n\theta]$$

及

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=\rho_0} = \frac{1}{2}a_0 + c_0\sigma(\rho_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[a_n\frac{P_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right.\right.$$

$$\left.+ |\tau_0|^{\frac{1}{2}}c_n\frac{Q_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right]\cos n\theta + \left[b_n\frac{P_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right.$$

$$\left.\left.+ |\tau_0|^{\frac{1}{2}}d_n\frac{Q_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right]\sin n\theta\right\}.$$

与(10)及(21)(把其中的 c, d 改为 c', d')相比较得

$$\alpha_0 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + d_n),\ \gamma_0 = c_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - d_n),$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad c_0' = a_0 + 2c_0\sigma(\rho_0),$$

$$c_n' = a_n\frac{P_n(\tau_0)}{\rho_0^n} + |\tau|^{\frac{1}{2}}c_n\frac{Q_n(\tau_0)}{\rho_0^n},$$

$$d_n' = b_n\frac{P_n(\tau_0)}{\rho_0^n} + |\tau|^{\frac{1}{2}}d_n\frac{Q_n(\tau_0)}{\rho_0^n}.$$

§7. 级数的收敛性

现在我们考虑级数

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}$$

$$+ c_0\sigma(\rho) + |\tau|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n} \quad \text{(F)}$$

的收敛性及是否适合于方程(D)的问题。

我们先考虑单位圆外的情况,即 $\rho \geqslant 1$, 命

$$\rho = \frac{1}{\cos \eta}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{\pi}{2},$$

则

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n + \left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n\right) = \cos n\eta,$$

$$|\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n} = \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{1+\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n - \left(\frac{1-\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)\right) = \sin n\eta,$$

$$\sigma(\rho) = \eta.$$

如此,级数(F)变为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \cos n\eta$$

$$+ c_0\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \sin n\eta. \qquad (1)$$

由于

$$\frac{\partial^2 u(\rho,\theta)}{\partial\theta^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \cos n\eta$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \sin n\eta \qquad (2)$$

及

$$\frac{\partial^2 u(\rho,\theta)}{\partial\rho^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\left(-n^2 \cos n\eta \left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)^2\right.$$

$$\left. - n \sin n\eta \frac{d\eta}{d\rho}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)$$

$$\times \left[-n^2 \sin n\eta \left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)^2 + n \cos n\eta \left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)\right], \qquad (3)$$

所以只要假定了

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n)n^2 < \infty, \qquad (4)$$

则级数(1)、(2)、(3)都一致收敛，因此，(F)在单位圆外适合于方程式(D).

条件(4)当然可由假定 $\varphi(\theta)$ 有四阶连续微商，$\chi(\theta)$ 有三阶连续微商推出之．当然也可由 $\varphi(\theta)$ 与 $\tau(\theta)$ 都有四阶连续微商推出之（或用其他 Fourier 级数论中常见的更弱的条件).

再论圆内的情况：我们将证明两点：

1° 如果级数(F)当 $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ 收敛，则当 $\rho > \rho_0$, $\theta = \theta_0$ 时也收敛.

2° 如果它当 $\rho = \rho_0$ 及一个测度为正的 θ 集合上收敛，则当 $\rho \geqslant \rho_0$ 时收敛（并且在这区域中任何一个有限区域一致收敛).

1° 的证明十分容易，因为 $P_n(\tau)/\rho^n$, $Q_n(\tau)/\rho^n$ 是 ρ 的递减函数，可以从

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)\frac{Q_n(\tau_0)}{\rho_0^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

立刻推得 $\rho > \rho_0$ 时，有 $\mu < 1$ 存在使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\frac{P_n(\tau)}{\rho^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \mu$$

及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)\frac{Q_n(\tau)}{\rho^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \mu.$$

要证明2°，我们需用引理：如果有一正测度的点集 θ，其上任一点 θ 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta|^{\frac{1}{n}} = \nu,$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n^2 + b_n^2|^{\frac{1}{2n}} = \nu.$$

这引理是已知的（或可以从数论中的一致分布概念推出）(Лузин, Steinhaus 见 Zygmund, Trigonometrial Sereis, p. 131 及 p. 269).

有了这引理立刻可用前法推出 2° 来,并可知推出

$$a_n, b_n, c_n, d_n = O(\rho_0^n)$$

这条件如果适合,则条件 (4) 当然成立.

总之,如果在单位圆内以原点为中心的一个圆上,有一正测度的点集在它上(下)收敛,则在此圆之外无处不收敛,并且适合于微分方程 (D).

§8. 圆内无奇点的函数(对应于全纯函数)

问题 在一条特征线上给定了函数值，定出一个处处都适合 (D) 的函数来. 这样的函数是否有？是否唯一？

由于特征线成一可递集，因此研究哪一条特征线反正都一样. 我们不妨就取 $x=1$, 即

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta}, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是问题更确切的叙述是,假定

$$u(\rho, \theta)|_{x=1} = \tau(\theta),$$

求出适合于 (D) 的 $u(\rho, \theta)$.

(1) 存在性 由于客观需要,我们假定 $\tau(\theta)$ 有二阶微商(如果 $u(\rho, \theta)$ 对 θ 没有二阶偏微商，那我们只可以作为广义解来讨论)并且假定 $\tau(\theta)$ 是以 π 为周期的函数. 命

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos 2n\theta + q_n \sin 2n\theta)$$

是 $\tau(\theta)$ 的 Fourier 展开式，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|p_n| + |q_n|)$$

显然收敛.

结论：命

$$\alpha_n = p_n + q_n, \quad \beta_n = q_n - p_n, \quad \alpha_0 = p_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

则

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \times \frac{P_n(\tau) + |\tau|^{\frac{1}{2}} Q_n(\tau)}{\rho^n} \tag{1}$$

就适合我们的要求.

先看在特征线上

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho} + i\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\rho} - i\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}\right)^n\right] = \cos n\theta,$$

$$|\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n} = \sin n\theta.$$

因此

$$u(\rho,\theta)|_{x=1} = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \times (\cos n\theta + \sin n\theta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(\cos 2n\theta + 1 + \sin 2n\theta) + \beta_n(\sin 2n\theta - \cos 2n\theta + 1)]$$

$$= \frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos 2n\theta + q_n \sin 2n\theta) = \tau(\theta).$$

其次在圆外，(1)处处收敛，而且适合于(D). 在单位圆外命

$$\rho = \frac{1}{\cos\eta}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{\pi}{2},$$

则

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n} = \cos n\eta, \quad |\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n} = \sin n\eta.$$

因而(1)变为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)(\cos n\eta + \sin n\eta).$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty$，这级数的收敛没有问题.

如果假定了

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|p_n| + |q_n|) < \infty, \tag{2}$$

则

$$\frac{\partial^2 u(\rho,\theta)}{\partial\theta^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \times (\cos n\eta + \sin n\eta)$$

及

$$\rho(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial\rho} = \rho(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\rho}$$

$$= \frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \times (-\sin n\eta + \cos n\eta).$$

由此可知(1)适合于方程式(D)，当然我们要添一些假定：例如 $\tau(\theta)$ 有四阶连续微商. 但如果不适合这个假定，我们也不妨把(1)看为方程(D)在双曲区的广义解.

最后，在单位圆内，我们引进新变数

$$\lambda = \frac{1}{\rho} - \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} = \frac{1 - \tau^{\frac{1}{2}}}{\rho} = \frac{\rho}{1 + \tau^{\frac{1}{2}}}.$$

由于

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2 \sqrt{1 - \rho^2}} \geqslant 0,$$

当 ρ 由 0 变到 1 时，λ 也单调上升地由 0 变到 1．这样便有

$$\frac{P_n(\tau)}{\rho^n} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1 + \tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^n + \left(\frac{1 - \tau^{\frac{1}{2}}}{\rho}\right)^2\right) = \frac{1}{2}(\lambda^n + \lambda^{-n}),$$

$$|\tau|^{\frac{1}{2}} \frac{Q_n(\tau)}{\rho^n} = \frac{1}{2}(-\lambda^n + \lambda^{-n}).$$

因此级数（1）变为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\lambda^{-n},$$

它是 (λ^{-1}, θ) 的调和函数，并且圆内处处收敛，因而在圆内（1）也适合于（D）．

（2）唯一性　我们证明，只有 $u(\rho, \theta) \equiv 0$ 才能适合于

$$u(\rho, \theta)|_{x=1} = 0,$$

而且单位圆内无奇点．

在圆外有通解

$$u(\rho, \theta) = F_1\left(\theta + \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right) + F_2\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right),$$

$$F_2(0) = 0,$$

即得

$$u(\rho, \theta)|_{x=1} = F_1(2\theta) = 0.$$

因此在圆外，

$$u(\rho, \theta) = F_2\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right), \quad F_2(0) = 0. \qquad (3)$$

由方程（D）可知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right|_{\rho=1}=\left.\frac{\partial}{\partial \rho}F_2\left(\theta-\cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)\right|_{\rho=1}$$

$$=\left.F_2'\left(\theta-\cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}\right|_{\rho=1}.$$

当 $\rho=1$ 时分母为 0，因此 $F_2'=0$. 命

$$U(\lambda,\theta)=u(\rho,\theta),$$

则得

$$\lim_{\rho\to 1-0}\frac{u(\rho,\theta)-u(1,\theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}}=\lim_{\lambda\to 1-0}\frac{U(\lambda,\theta)-U(1,\theta)}{1-\lambda}$$

$$=-\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1},$$

也就是

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1}=-\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\lambda=1}.$$

假定 U 是复变数解析函数 $f(z)$ 的实数部分，而 V 乃其虚数部分，则

$$f(z)=U+iV$$

把单位圆 $|z|=1$ 变为一直线

$$U+V=0.$$

运用 Schwarz 对称原理，在某些必须添加的条件下，函数 $f(z)$ 的解析性可以扩展到全平面（包括无穷远点），因而证出 $V=0$.

§9. 圆内有对数奇点的函数

先从

$$\log\lambda$$

出发. 它是一个圆内以原点为对数奇点的调和函数. 换为 (ρ,θ) 符号，则得方程 (D) 的一个基本解

$$\sigma(\rho)=\begin{cases}\log\left(\frac{1}{\rho}-\sqrt{\frac{1}{\rho^2}-1}\right), & \text{当 } \rho\leqslant 1,\\ \cos^{-1}\frac{1}{\rho}, & \text{当 } \rho\geqslant 1\end{cases}$$

或

$$\sigma(x,y)=\begin{cases}\log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当 } x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$$

现在利用群的作用,命

$$x=f(x', y', a, b), \quad y=g(x', y', a, b)$$

代表一个把 (a, b) 变为原点的变换,这样,

$$\begin{aligned}\sigma(x, y)&=\sigma(f(x', y'; a, b), g(x', y'; a, b))\\ &=\sigma_{a,b}(x', y').\end{aligned}$$

由于偏微分方程的不变性可知 $\sigma_{a,b}(x, y)$ 依然是 (D) 的解答.

命 $\mu(a, b)$ 是任一分布函数,则

$$F(x, y)=\iint\limits_{a^2+b^2\leqslant 1}\sigma_{a,b}(x,y)d\mu(a, b)$$

依然是方程 (D) 的解答.

问题 $F(1, y)$ 是怎样的函数类, 也便是从怎样的函数 $\{\varphi(y)\}$ 类中,对每一个 $\varphi(y)$ 我们可以找到一个 $\mu(a, b)$ 使

$$\varphi(y)=\iint\limits_{a^2+b^2\leqslant 1}\sigma_{a,b}(1, y)d\mu(a, b).$$

更具体些:

$x_1=(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\mu)/(1-\mu x\cos\alpha-\mu y\sin\alpha)$,

$y_1=\sqrt{1-\mu^2}(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)/(1-\mu x\cos\alpha-\mu y\sin\alpha)$

是一个 Γ 内的变形, 它把圆内的一点 $(\mu\cos\alpha, \mu\sin\alpha)$ 变为

$(0,0)$. 因而函数

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mu\cos\alpha,\,\mu\sin\alpha}(x,y)\\
&=\sigma\left(\frac{\sqrt{(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\mu)^2+(1-\mu^2)(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2}}{1-\mu x\cos\alpha-\mu y\sin\alpha}\right)\\
&=\sigma\left(\frac{\sqrt{(1-\mu^2)(x^2+y^2-1)+(1-\mu(x\cos\alpha+y\sin\alpha))^2}}{1-\mu(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}\right)\\
&=\sigma\left(\frac{\sqrt{(1-\mu^2)(\rho^2-1)+(1-\mu\rho\cos(\alpha-\theta))^2}}{1-\mu\rho\cos(\alpha-\theta)}\right)
\end{aligned}
$$

$(x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta)$.

当 $x=1,\ y=\tan\theta$ 时

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\tan\theta)\\
&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos^{-1}\frac{\cos\theta-\mu\cos(\alpha-\theta)}{\sqrt{(1-\mu^2)\sin^2\theta+(\cos\theta-\mu\cos(\alpha-\theta))^2}}dq(\alpha,\mu).
\end{aligned}
$$

问题一变而为怎样的 $\varphi(\tan\theta)$, 我们可以解得围变函数 $q(\alpha,\mu)$.

§10. Poisson 公式

从 Γ 的一般变形函数

$$
x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3},\quad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3} \tag{1}
$$

命

$$
x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\quad x'=\cos\theta',\ y'=\sin\theta'.
$$

如此则得

$$
\cos\theta'=\frac{a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+c_1}{a_3\cos\theta+b_3\sin\theta+c_3},
$$

$$
\sin\theta'=\frac{a_2\cos\theta+b_2\sin\theta+c_2}{a_3\cos\theta+b_3\sin\theta+c_3}.
$$

所以

$$
\tan\theta'=\frac{a_2\cos\theta+b_2\sin\theta+c_2}{a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+c_1}. \tag{2}
$$

因之，由§1的 a, b, c 的关系可得

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=((a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+c_1)(-a_2\sin\theta+b_2\cos\theta)-$$
$$(a_2\cos\theta+b_2\sin\theta+c_2)(-a_1\sin\theta+b_1\cos\theta))/((a_2\cos\theta+$$
$$b_2\sin\theta+c_2)^2+(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+c_1)^2)$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1+(-c_1a_2+c_2a_1)\sin\theta+(c_1b_2-c_2b_1)\cos\theta)/$$
$$((1+a_3^2)\cos^2\theta+2a_3b_3\cos\theta\sin\theta+(1+b_3^2)\sin^2\theta+$$
$$2a_3c_3\cos\theta+2b_3c_3\sin\theta+c_3^2-1)$$
$$=\frac{1}{a_3\cos\theta+b_3\sin\theta+c_3}. \tag{3}$$

因此得出

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|a_3\cos\theta+b_3\sin\theta+c_3|}. \tag{4}$$

假定变换(1)把点 (ξ,η) 变为原点，即

$$a_1\xi+b_1\eta+c_1=0,\quad a_2\xi+b_2\eta+c_2=0. \tag{5}$$

此点 (ξ,η) 在单位圆内. 由(5)可知

$$\xi=-\frac{a_3}{c_3},\quad \eta=-\frac{b_3}{c_3}.$$

又由

$$a_3^2+b_3^2-c_3^2=-1,$$

可知

$$c_3^2(\xi^2+\eta^2-1)=-1.$$

代入(3)式得

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=\pm\frac{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}{1-\xi\cos\theta-\eta\sin\theta}.$$

换 (ξ,η) 为 (x,y)，因此由(4)得出：对圆内任一点 (x,y) 常有

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-x\cos\theta-y\sin\theta}d\theta. \tag{6}$$

(由于 $|x\cos\theta-y\sin\theta|<1$.) 如果用极座标，则

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho\cos(\theta-\psi)}\,d\theta. \tag{7}$$

如果 (x, y) 在圆外,即当 $\rho>1$ 时,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\rho\cos(\theta-\psi)}=0. \tag{8}$$

要证明此点十分容易,因为 $\dfrac{1}{1-\rho\cos\theta}$ 的不定积分等于

$$\frac{1}{\rho^2-1}\log\left|\frac{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\theta+1-\rho}{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\theta-1+\rho}\right|.$$

因此

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1-\rho\cos\theta}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_0^{\cos^{-1}\frac{1}{\rho}-\varepsilon}+\int_{\cos^{-1}\frac{1}{\rho}+\varepsilon}^{\pi}\right)\frac{d\theta}{1-\rho\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\rho^2-1}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\log\left|\frac{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\theta+1-\rho}{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\theta-1-\rho}\right|\Bigg|_{\cos^{-1}\frac{1}{\rho}+\varepsilon}^{\cos^{-1}\frac{1}{\rho}-\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}\lim_{\varepsilon\to0}\log\left|\frac{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\left(\cos^{-1}\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)+1-\rho}{\sqrt{\rho^2-1}\tan\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{\rho}+\varepsilon+1-\rho}\right|$$

$$=0.$$

引进一个函数

$$P(\rho,\theta-\psi)=\frac{|\tau|^{\frac{1}{2}}}{1-\rho\cos(\theta-\psi)},\quad \tau=1-\rho^2,$$

称为 Poisson 核. 这函数有以下的一些性质:

(1) 把 $P(\rho,\theta-\psi)$ 看成为极座标 (ρ,θ) 的函数, 不管圆内圆外,它适合于(D).

(2) 在圆周上除去一点 $\theta=\psi$ 外,处处为 0.

(3) 在整个平面上，除去一条直线(特征线之一，$\rho\cos(\theta-\psi)=1$)外，处处有限，但在这特征线上，它变为无穷.

(4) 我们有关系式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta)d\theta=\begin{cases}0, & 若\ \rho>1,\\ 1, & 若\ \rho<1.\end{cases}$$

如果给了

$$u(\rho,\theta)|_{\rho=1}=\alpha(\theta),$$

作函数

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\psi)\alpha(\psi)d\psi, \tag{9}$$

在圆内这函数是适合于微分方程(D)的.

在圆外，命

$$\rho=\frac{1}{\cos\eta},\quad 0\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

则

$$P(\eta,\theta-\psi)=\frac{\sin\eta}{\cos\eta-\cos(\theta-\psi)}$$

$$=-\frac{\sin\eta}{2\sin\frac{1}{2}(\eta+\theta-\psi)\sin\frac{1}{2}(\eta-\theta+\psi)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\tan\frac{1}{2}(\eta+\theta-\psi)+\tan\frac{1}{2}(\eta-\theta+\psi)\right).$$

由此可得，

$$u(\rho,\theta)=F_1(\eta+\theta)+F_2(\eta-\theta),$$

此处

$$F_1(\gamma)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\tan\frac{1}{2}(\gamma-\psi)\alpha(\psi)d\psi,$$

$$F_2(\gamma)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\tan\frac{1}{2}(\gamma+\psi)\alpha(\psi)d\psi.$$

这些奇异积分可能并不存在，即使存在也可能不能求微商.但

我们可以把公式(9)作为在双曲区方程(D)的广义解来处理.

在 $\alpha(\psi)$ 上加上些条件使 F_1、F_2 存在而且有二阶微商，这样的 $u(\rho, \theta)$ 就是方程(D)的解.

§ 11. 变型线上给了值的函数

假定给了

$$u(\rho, \theta)|_{\rho=1} = F(\theta). \tag{1}$$

及

$$\lim_{\rho \to 1 \pm 0} \frac{u(\rho, \theta) - F(\theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = G(\theta), \tag{2}$$

此处 $F(\theta)$, $G(\theta)$ 在 $\alpha < \theta < \beta$ 间是实解析函数，由此条件定出适合于(D)的函数 $u(\rho, \theta)$.

在圆内命

$$u(\rho, \theta) = U(\lambda, \theta), \tag{3}$$

则

$$U(1, \theta) = F(\theta), \left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = -G(\theta),$$

这就是一个 Ковалевская 问题，其解答如下：

先考虑适合于

$$U_1(1, \theta) = F(\theta), \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = 0 \tag{4}$$

的调和函数，函数

$$U_1(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log \lambda)^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(\theta) \tag{5}$$

就适合我们的要求，其理由是

(i) $U_1(1, \theta) = F(\theta)$,

(ii) $\lambda \left.\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log \lambda)^{2n-1}}{(2n-1)!} F^{(2n)}(\theta)\Big|_{\lambda=1} = 0$

及

(iii) $\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda \frac{\partial U}{\partial \lambda}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log \lambda)^{2n-2}}{(2n-2)!} F^{(2n)}(\theta)$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\log \lambda)^{2m}}{(2m)!} F^{(2m)}(\theta)\right).$$

由于

$$F(\theta + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} x^n,$$

可知

$$F(\theta + i \log \lambda) + F(\theta - i \log \lambda)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!} (i^n + (-i)^n)(\log \lambda)^n.$$

由(5)得出

$$U_1(\lambda, \theta) = \frac{1}{2}(F(\theta + i \log \lambda) + F(\theta - i \log \lambda)). \quad (6)$$

同法得出适合于

$$U_2(1, \theta) = 0, \quad \left.\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = G(\theta)$$

的调和函数是

$$U_2(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log \lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!} G^{(2n)}(\theta)$$

$$= \frac{1}{2i}(G_1(\theta + i \log \lambda) - G_1(\theta - i \log \lambda)),$$

此处 $G_1(\theta) = \int_0^\theta G(t)dt$.

因此,

$$U(\lambda, \theta) = U_1(\lambda, \theta) - U_2(\lambda, \theta) = \frac{1}{2}(F(\theta + i \log \lambda)$$

$$+ F(\theta - i \log \lambda)) - \frac{1}{2i}(G_1(\theta + i \log \lambda)$$

$$- G_1(\theta - i\log\lambda)).$$

回到原符号，在圆内

$$\sigma(\rho) = \log\left(\frac{1}{\rho} + \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}\right)$$

$$= -\log\left(\frac{1}{\rho} - \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}\right) = -\log\lambda.$$

因此，当 $\rho \leqslant 1$ 时，

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2}[F(\theta + i\sigma(\rho)) + F(\theta - i\sigma(\rho))]$$

$$+ \frac{1}{2i}[G_1(\theta + i\sigma(\rho)) - G_1(\theta - i\sigma(\rho))]. \tag{7}$$

在圆外，

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2}\left[F\left(\theta + \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right) + F\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[G_1\left(\theta + \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right) - G_1\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)\right]. \tag{8}$$

极易证明：

$$u(1, \theta) = F(\theta),$$

及

$$\lim_{\rho\to\pm 1}\frac{u(\rho, \theta) - u(1, \theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = G(\theta),$$

也就是 (7) 与 (8) 给了本问题的解答.

再看这解答在圆外适用的范围，由于必须要

$$\alpha \leqslant \theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho} < \theta + \cos^{-1}\frac{1}{\rho} \leqslant \beta,$$

可知

$$\rho\cos(\alpha - \theta) \geqslant 1 \geqslant \rho\cos(\beta - \theta),$$

即在单位圆二切线之间，其一是切于 $\theta = \alpha$，它一是切于 $\theta = \beta$ 的直线.

假定 $\alpha = 0$，现在看这函数在 $x = 1$ 上的情况，即

$\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$，则

$$u\left(\frac{1}{\cos\theta}, \theta\right) = \frac{1}{2}(F(2\theta) + F(0)) + \frac{1}{2}(G_1(2\theta) - G_1(0)),$$

$$0 < \theta < \beta.$$

§ 12. 在一特征线上取零值的函数

再考虑适合于

$$u(\rho, \theta)|_{x=1} = 0 \tag{1}$$

的函数类.

在圆外由于

$$u(\rho, \theta) = F_1\left(\theta_1 + \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right) + F_2\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right),$$

$$F_2(0) = 0,$$

即得

$$u(\rho, \theta)|_{x=1} = F_1(2\theta) = 0.$$

因此

$$u(\rho, \theta) = F_2\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right), \quad F_2(0) = 0.$$

由

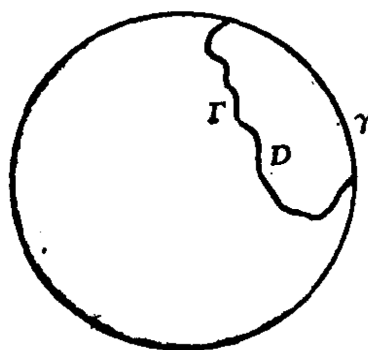
$$\lim_{\rho \to 1} \frac{u(\rho, \theta) - u(1, \theta)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = \lim_{\rho \to 1} \frac{F_2\left(\theta - \cos^{-1}\frac{1}{\rho}\right)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} = F_2'(\theta),$$

命 $u(\rho, \theta) = U(\lambda, \theta)$，则适合于(1)的函数常适合于

$$U(1, \theta) = F_2(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial\lambda} U(\lambda, \theta)|_{\lambda=1} = -F_2'(\theta). \tag{2}$$

如果 $u(\rho,\theta)$ 在圆内有一部分存在，而且包有一段圆弧为边界，另一部分是一曲线，在 (λ,θ) 平面上所对应的区域记之

为 D，其边界也有一部分是单位圆的圆弧，记之为 γ，其他部分以 Γ 记之。



在 D 内 $U(\lambda,\theta)$ 是一个解析函数的实数部分，而且命之为

$$\Omega = f(z) = U(\lambda,\theta) + iV(\lambda,\theta).$$

由于

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}U(\lambda,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}V(\lambda,\theta),$$

所以

$$V(1,\theta) = -F_2(\theta) + C,$$

这儿 C 是一常数．不妨假定它等于 0．保角变换

$$Z = f(z)$$

把 D 变为 D^*，把 D 的圆弧边界 γ 变为直线

$$U + V = 0.$$

假定保角变换是单叶的，则由 Schwarz 原理解析扩展可以把函数 $f(z)$ 的解析性推到圆外，假定 Γ' 是由 Γ 依圆反演出来的曲线，则在 Γ' 与 Γ 所围成的区域内 $f(z)$ 定义，在 Γ 上 $f(z)$ 的实数部分已经有了，在 Γ' 上 U 也已定义了，由 Γ 与 Γ' 上的值，u 是存在的，而且是唯一的．（详情与 Бицадзе 的工作相仿，用 Келдеыщ-Седов 公式解决这问题.）

第八讲　形式 Fourier 级数与广义函数

§1. 形式 Fourier 级数

已经不止一次地提到，给了一个收敛的 Fourier 级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{1}$$

有一个圆内的调和函数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\rho^n,\quad 0\leqslant\rho<1. \tag{2}$$

但是反过来，如果(2)对任一适合于 $0\leqslant\rho<1$ 的 ρ 收敛，如果(2)收敛，我们就说(1)定义一个广义函数．因为调和函数是无穷可微的，因而广义函数也是无穷可微的．

虽然看来简单，这样定义出来的广义函数比 L. Schwarz 的广义函数的范围还大，更宽广的考虑是从形式 Fourier 级数出发．

一个形式 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in\theta}$$

就定义为一个广义函数，我们不管它是不是收敛，是不是在某种意义下可求和．这一广义函数用 $u(\theta)$ 来表示．

今后常用 $\sum\limits_{n}$ 表示 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$，而 $\sum\limits_{n}{}'$ 表示 $\sum\limits_{n}$ 中除去一项 $n=0$．命

$$v(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{in\theta}$$

对任二复数 λ、μ，形式 Fourier 级数

$$\lambda u(\theta) + \mu v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) e^{in\theta}$$

仍然是一广义函数．所以广义函数是一线性集合．

二广义函数的乘积一般不定义的，其原因在于

$$\sum_{l+m=n} a_l b_m$$

可能并不收敛．

但如果

$$\sum_n a_n \bar{b}_n$$

收敛（或在某种意义可求和），则此值称为二广义函数 $u(\theta)$ 与 $\overline{v(\theta)}$ 的无向积或内积，以 $(u(\theta), \overline{v(\theta)})$ 表之．

显然有

$$(u(\theta), \overline{v(\theta)}) = \overline{(v(\theta), \overline{u(\theta)})},$$

$$(\lambda u_1(\theta) + \mu u_2(\theta), \overline{v(\theta)}) = \lambda (u_1(\theta), \overline{v(\theta)}) + \mu (u_2(\theta), \overline{v(\theta)}),$$

而且有

$$(u(\theta), \overline{e^{in\theta}}) = a_n.$$

定义

$$(u(\theta), \overline{v(\theta-\phi)}) = (u(\theta+\phi), \overline{v(\theta)}) = \sum_n a_n \bar{b}_n e^{in\phi}$$

为二函数 $u(\theta)$, $v(\theta)$ 的卷积．

最有趣的例子是 Dirac 函数

$$\delta(\theta) = \sum_n e^{in\theta},$$

它使

$$(u(\theta), \overline{\delta(\theta-\phi)}) = \sum_n a_n e^{in\phi} = u(\phi).$$

有时我们也把 $\delta(\theta-\phi)$ 记成为 $\delta_\phi(\theta)$.

广义函数 $u(\theta)$ 的微商的定义是

$$i\sum_n na_n e^{in\theta},$$

以 $u'(\theta)$ 记之，显然有

$$(u'(\theta),\overline{v(\theta)})=i\sum_n na_n\overline{b}_n=-\sum a_n\overline{(inb_n)}$$

$$=-(u(\theta),\overline{v'(\theta)}).$$

故立得

$$(u(\theta),\overline{\delta'(\theta-\phi)})=-\overline{(u'(\theta),\delta(\theta-\phi))}=-u'(\phi),$$

及

$$(u(\theta),\overline{\delta^{(\nu)}(\theta-\phi)})=-(-1)^\nu u^{(\nu)}(\phi).$$

但这样定义的广义函数太广泛了，不能推出很多有用的结论. 我们现在先引进两类特殊的广义函数.

如果系数 a_n 适合于

$$\max\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}|a_{-n}|^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant 1,$$

则所对应的广义函数称为 H 类的广义函数，或简称 H 型广义函数.

显然，H 类广义函数成一线性集合，而且 H 类广义函数的微商仍然是 H 类广义函数. 二 H 型广义函数的卷积仍然是 H 型广义函数.

如果有一整数 p，使 $a_n=O(|n|^p)$，则所对应的广义函数称为 S 型的广义函数. 这就是 L. Schwarz 的广义函数.

显然，一个 S 型广义函数一定是一个 H 型广义函数，且 S 型广义函数也成为一线性集合且对微分运算及卷积而自封.

附记 H 型广义函数之间定义了两个运算“加”和“卷积”，把“卷积”看为“乘”，则所有的 H 型广义函数成一环.

更明确些，定义

$$u(\theta) \pm v(\theta) = \sum_n (a_n \pm b_n) e^{in\theta},$$

$$u(\theta) \bigcirc v(\theta) = (u(\psi), v(\theta - \psi)) = \sum_n a_n b_n e^{in\theta},$$

交换、结合、分配等定律都不难直接证明. 这环还有单位元

$$\delta(\theta) = \sum_n e^{in\theta},$$

而

$$\lambda u(\theta) = (u(\theta), \lambda\delta(\psi - \theta)).$$

$e^{in\theta}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$是幂等元, 即 $e^{in\theta} \bigcirc e^{in\theta} = e^{in\theta}$. 这些幂等元是相互正交的,即 $e^{im\theta} \bigcirc e^{in\theta} = 0$(若 $m \neq n$). 这些幂等元的和是单位元 $\delta(\theta)$.

S 型函数也有此性质.

§2. 对 偶 性

两类广义函数 T 与 $\mathring{T}$ 如适合以下的三条件则称为互相对偶: (i) 对诸 $u \in T$ 及诸 $v \in \mathring{T}$, $(u, \bar{v})$ 常收敛. (ii) 若 $(u, \bar{v})$ 对所有的 $u \in T$ 常收敛, 则可以推出 $v \in \mathring{T}$ 及 (iii) 若 $(u, \bar{v})$ 对所有的 $v \in \mathring{T}$ 常收敛, 则 $u \in T$.

例一 所有广义函数成一类 K 和所有的由有限 Fourier 级数所成的类 $\mathring{K}$ 之间是有对偶关系的.

例二 命 $p > 1$ 及 $p' = p/p - 1$, 则 L^p 与 $L^{p'}$ 之间是有对偶关系的. 这些 L^p 表示适合于

$$\sum_n |a_n|^p < \infty$$

的 $u(\theta)$ 的函数类.

例三 如果把 $\sum_n a_n \bar{b}_n$ 的收敛性改为 $(c, 1)$ 求和法, 则还有以下的一些对偶类: (a) B 与 L(此处 B 表示囿函数的 Fourier 级数所成的类), (b) C 与 St 成一对偶类(此处 C 表示

连续函数的 Fourier 级数所成的类，St 表示 Fourier-Stieltjes 级数所成的类）.

总起来，具有以下的关系

$$C \subset L^{\infty} = B \subset L^{p'} \subset L^2 \subset L^p \subset L \subset St.$$

容易证明，一类与其对偶类重合必然是 L^2.

定理 1 命 $\varphi(n)$ 表一递增正函数，当 n 趋向无穷时，$\varphi(n)$ 趋向无穷．并且假定对任一 $\delta > 0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\varphi(n))^{\delta}}$$

常收敛．命 T 代表适合于

$$\log |a_n| = o(\log \varphi(|n|))$$

的广义函数所成的类，而 $\mathring{T}$ 是适合于

$$\log \varphi(|n|) = O\left(\log \frac{1}{|b_n|}\right)$$

的广义函数所成的类，则 T 与 $\mathring{T}$ 之间有对偶关系．

证 (i) 由定义，对任一 $\varepsilon > 0$，当 n 充分大时常有

$$|a_n| \leqslant (\varphi(|n|))^{\varepsilon},$$

又有一数 $c > 0$ 使

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{(\varphi(|n|))^{c}}.$$

所以 $\sum\limits_{n} a_n \bar{b}_n$ 是收敛的．

(ii) 假定 ν 不属于 $\mathring{T}$，则有一数列 n_ν，使

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\log \varphi(|n_\nu|)}{\log \dfrac{1}{|b_{n_\nu}|}} = \infty$$

取 $a_{n_\nu} = 1/b_{n_\nu}$ 及其他 $a_n = 0$，如此所定义的广义函数 $u(\theta)$ 属于 T 而 $\sum\limits_{n} a_n \bar{b}_n$ 发散．

(iii) 假定 u 不属于 T，则有一数列 n_ν，使

$$\log|a_{n_\nu}| \geqslant c\log\varphi(|n_\nu|), \quad c>0.$$

取 $b_{n_\nu}=\dfrac{1}{a_{n_\nu}}$ 及其他 $b_n=0$，如此所定义的广义函数 $v(\theta)$ 属于 $\mathring{T}$ 而 $\sum\limits_n a_n\bar{b}_n$ 发散。

在定理 1 中取 $\varphi(n)=e^n$，则类 T 立刻变为类 H. 盖由

$$\log|a_n| = o(|n|),$$

可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1.$$

又关系

$$|n| = O\left(\log\frac{1}{|b_n|}\right),$$

与次之关系等价

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{|n|}}<1.$$

因此得

定理 2 H 类的对偶类 $\mathring{H}$ 是适合于以下条件的广义函数所组成：

$$\max\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}, \overline{\lim_{n\to\infty}}|b_{-n}|^{\frac{1}{n}}\right)<1.$$

取 $\varphi(n)=e^{n^p}(p>1)$ 所得的类 T 以 G_p 表之，由定理 1 可推出：

定理 3 G_p 是由适合于

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|a_n|^{|n|^{-p}}\leqslant 1$$

的广义函数所成的类，它的对偶类 $\mathring{G}_p$ 是由适合于

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}|b_n|^{|n|^{-p}}<1$$

的广义函数所成的。

类 G_p 是由 Гелфанд-Шилов 所引进的.

与定理 1 的证法相仿可得

定理 4 命 $\psi(n)$ 表一递增正函数当 n 趋无穷，并且假定有一正数 λ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\psi(n))^{\lambda}}$$

收敛．命 T 表适合以下条件的广义函数类

$$\log|a_n| = O(\log\psi(|n|)),$$

及 $\mathring{T}$ 为适合于

$$\log\psi(|n|) = o\left(\log\frac{1}{|b_n|}\right)$$

的广义函数所成的类，则类 T 与类 $\mathring{T}$ 是有对偶关系的.

在定理 4 中取 $\psi(n) = n$，则类 T 就是类 S，故得

定理 5 S 类的对偶类 $\mathring{S}$ 是由适合以下条件的广义函数所组成的，对任一 $q > 0$ 常有

$$b_n = O\left(\frac{1}{|n|^q}\right).$$

再在定理 4 中取 $\psi(n) = e^n$，所得出的类 T 以 I 表之，由定理 4 可得

定理 6 I 类的对偶类 $\mathring{I}$ 是由适合于

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{-|n|^{-1}} = \infty$$

的函数所组成的.

附记 1 类还可以分得更细致，例如在定理 4 中把条件改为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|a_n|}{\log\psi(|n|)} \leqslant \rho,$$

并无任何困难可以找出这类的对偶类.

附记 2 极易证明，$\mathring{H}$ 类（或 $\mathring{S}$ 类）也是线性集合而且对

微分运算及卷积而自封的，它虽然成一环，但并不包有单位元。$\mathring{H}$ 是H的理想子，命 H^* 表示H中的任一理想子。如果H^* 中所包有的广义函数都是普通函数，也就是这些广义函数的形式 Fourier 级数都是收敛的，则H^* 称为函数类的理想子，易见：$\mathring{H}$ 是H的最大的函数类理想子。

§3. H 型广义函数的意义

对应一个H型广义函数 $u(\theta)$，我们有一个函数

$$u(r,\theta)=\sum_n a_n e^{in\theta} r^{|n|},\quad 0\leqslant r<1,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$

此乃单位圆的调和函数。

故一个H型广义函数可以视为一个圆内调和函数的边界值函数。

同法一个 $\mathring{H}$ 型广义函数 $v(\theta)$（它是一个普通意义的函数）对应于一个在较大同心圆中的调和函数。

又显然，对应于一个 $\mathring{I}$ 型广义函数 $v(\theta)$，我们有一个处处调和的函数

$$\sum_n b_n e^{in\theta} r^{|n|},$$

这种函数也称为调和整函数。所以 $\mathring{I}$ 型函数是调和整函数在单位圆周上的数值。

广义函数

$$\delta_\psi(\theta)$$

属于H，但不属于$\mathring{H}$，这广义函数所对应的调和函数就是

$$\sum_n e^{in(\theta-\psi)} r^{|n|}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}.$$

这就是习知的 Poisson 核，以 $P(r,\theta)$ 表之。

命 $f(\theta)$ 表一连续（或可积）函数，其 Fourier 系数为 b_n，则对任一 $u(\theta)\in H$ 常有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{f(\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_n a_n e^{in\theta} r^{|n|}\overline{f(\theta)}d\theta$$

$$= \sum_n a_n r^{|n|} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} e^{in\theta} d\theta = \sum_n a_n \bar{b}_n r^{|n|}.$$

如果$(u(\theta),\overline{f(\theta)})$收敛，则由 Abel 定理可知

$$(u(\theta),\overline{f(\theta)}) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{f(\theta)}d\theta.$$

更一般些，对H中任二广义函数$u(\theta)$及$v(\theta)$，对$r<1$，$r'<1$常有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{v(r',\theta)}d\theta = \sum_n a_n \bar{b}_n (rr')^{|n|}.$$

如果$(u,\bar{v})$存在，则

$$(u,\bar{v}) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)}d\theta.$$

又对$u\in H$及$v\in \mathring{H}$，则有一$\delta>0$使$0\leqslant r'<1+\delta$时，$v(r',\theta)$调和. 取$r=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\delta}$及$r'=1+\frac{1}{2}\delta$，可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{v(r',\theta)}d\theta = \sum_n a_n\bar{b}_n = (u(\theta),\overline{v(\theta)}).$$

§4. S型广义函数的意义

任一连续函数$u(\theta)$的 Fourier 系数a_n适合于

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|d\theta = O(1).$$

作为一个S型广义函数，其p阶微商的 Fourier 系数$a_n^{(p)}$适合于

$$a_n^{(p)} = O(|n|^p).$$

反之，如果

$$a_n = O(|n|^p),$$

则 $u(\theta)-a_0$ 是广义函数

$$\sum_n{}' \frac{a_n}{(in)^{p+2}} e^{in\theta}$$

的 $p+2$ 阶微商. 而这级数一致收敛,收敛于一个连续函数. 因此, 所谓 S 型的广义函数类实质上就是连续函数所定义的广义函数的有限次微商的集合.

同法可以证明: $\mathring{S}$ 型的广义函数类就是无穷次可微的函数所成的集合.

由上节的结果已知: 若 $u\in S$, $v\in\mathring{S}$, 则

$$(u,\bar{v})=\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\overline{v(\theta)}d\theta.$$

如果 $u(\theta)-a_0$ 是连续函数 $w(\theta)$ 的 p 次微商,则由分部积分可知

$$\begin{aligned}(u,\bar{v})&=a_0\bar{b}_0+\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)-a_0)\overline{v(\theta)}d\theta\\&=a_0\bar{b}_0+\lim_{r\to1}\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(r,\theta)\overline{v^{(p)}(\theta)}d\theta\\&=a_0\bar{b}_0+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(\theta)\overline{v^{(p)}(\theta)}d\theta.\end{aligned}$$

就是我们可以用普通的运算表达出来.

§5. 致 零 集

定义 单位圆周上的一个开区间 $a<\theta<b$ 称为一个 H 型广义函数的致零区间, 如果在 $a<\theta<b$ 中的闭区间中一致地

$$\lim_{r\to1}u(r,\theta)=0.$$

一点 θ_0 称为 $u(\theta)$ 的支点, 如果没有包有 θ_0 的致零区间存在.

所有的 $u(\theta)$ 的致零区间的总集合称为函数 $u(\theta)$ 的致零

集. 这是一个开集，其补集称为支点集. 显然支点集的任一点都是支点.

例 $\delta_\psi(\theta)$ 是一个以 $\theta=\psi$ 为唯一支点的广义函数. 其理由是，当 $\theta\neq\psi$ 时，当 $r\to 1$ 时

$$P(r,\theta)=\frac{1-r^2}{1+2r\cos(\theta-\psi)+r^2}$$

趋于 0.

定理 1 H 型的仅有一个支点 $\theta=\psi$ 的广义函数可以表成为

$$u(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu\overline{D^{(\nu)}[\delta_\psi(\theta)]},$$

此处 $D^{(\nu)}[\delta_\psi(\theta)]$ 是 $\delta_\psi^{0}(\theta)=\delta_\psi(\theta)$, $\delta'_\psi(\theta)$, $\cdots$, $\delta_\psi^{(\nu)}(\theta)$ 的线性组合，而 $\delta_\psi^{(\nu)}(\theta)$ 是 $\delta_\psi(\theta)$ 的 ν 阶微商，更确切些，对任一 $v\in\mathring{H}$，常有

$$(u(\theta),\overline{v(\theta)})=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\overline{D^{(\nu)}(v(\psi))},$$

这儿

$$D^{(\nu)}(v(\psi))=\frac{1}{\nu!}\left[\frac{d^\nu v(\psi+\sin^{-1}x)}{dx^\nu}\right]_{x=0},$$

以上的级数是收敛的.

定理 2 S 型的仅有一个支点 $\theta=\psi$ 的广义函数可以表成为

$$u(\theta)=\sum_{\nu=0}^{l}c_\nu\overline{\delta^{(\nu)}(\theta)},$$

这儿 l 是一非负整数. 更确切些，对任一 $v\in\mathring{S}$，则有

$$(u(\theta),\overline{v(\theta)})=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\overline{v^{(\nu)}(\theta)}.$$

二定理的证明:

并不失其普遍性，我们可以假定 $\psi=0$. 我们把区间移

成为 $-\pi, \pi$。

对任一已与的 $\varepsilon > 0$，当 $r \to 1$ 时函数在 $|\theta| > \varepsilon$ 的部分上一致趋近于 0，故

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)\overline{v(\theta)}d\theta = \lim_{r\to 1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(r,\theta)\overline{v(\theta)}d\theta.$$

当 ε 充分小时，在 $|\theta| \leqslant \varepsilon$ 中，我们把函数 $v(\theta)$ 展开成

$$v(\theta) = \sum_{\nu=0}^{l} D^{(\nu)}(v(0))\sin^{\nu}\theta + R(\theta),$$

这儿 $R(\theta) = O(\varepsilon^{l+1})$,

$$D^{(\nu)}(v(0)) = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^{\nu}v(\sin^{-1}x)}{dx^{\nu}}\right)\bigg|_{x=0}.$$

在定理 1 的假定下，这级数可以展到无穷，而且当 $|\theta| \leqslant \varepsilon$ 时一致收敛.

由于

$$C_{\nu} = \lim_{r\to 1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\sin\theta)^{\nu}u(r,\theta)d\theta = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin\theta)^{\nu}u(r,\theta)d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^{\nu}u(r,\theta)d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1}\frac{1}{(2i)^{\nu}}\sum_{t=0}^{\nu}\binom{\nu}{t}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\theta}e^{-i(\nu-t)\theta}u(r,\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{(2i)^{\nu}}\sum_{t=0}^{\nu}\binom{\nu}{t}a_{\nu-2t}.$$

故得定理 1（并且我们有了 c_{ν} 的表达式）.

在证明定理 2 时，我们命

$$R^{*}(\theta) = \begin{cases} R(\theta), & \text{当 } |\theta| < \varepsilon, \\ 0, & \text{其他点}. \end{cases}$$

则

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}R(\theta)u(r,\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}R^{*}(\theta)u(r,\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}R^{*}(\theta)(u(r,\theta)-a_0)d\theta + a_0\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}R(\theta)d\theta.$$

最后一项显然随 ε 而趋于 0，又命 $w(\theta)$ 表一连续函数其 l 次微商等于 $u(r,\theta)-a_0$，如此则

$$\lim_{r\to 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} R^*(\theta)(u(r,\theta)-a_0)d\theta\right| = \lim_{r\to 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\right.$$

$$\left.\times\ R^{*(l)}(\theta)w(r,\theta)d\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |R^{*(l)}(\theta)w(\theta)|d\theta = O(\varepsilon),$$

故得定理 2。

§6. 其他类型的广义函数

定义 命 $\rho>0$，如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_n|}{n\log n}<\frac{1}{\rho},\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_{-n}|}{n\log n}<\frac{1}{\rho},$$

则 $u(\theta)$ 称为 J_ρ 类的广义函数，或 J_ρ 型广义函数。

显然，J_ρ 型广义函数成一线性集合，其微商仍然是广义函数。但注意，两个 J_ρ 型广义函数的卷积不一定是广义函数。

定理 1 J_ρ 的对偶类 $\mathring{J}_\rho$ 的广义函数适合以下条件

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\frac{1}{|b_n|}}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho},\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\frac{1}{|b_{-n}|}}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho}.$$

证 (1) 由 J_ρ 的定义，对一 $\delta>0$，存在 $n_0(\delta)$ 使 $n\geqslant n_0(\delta)$ 时，

$$\frac{\log|a_n|}{n\log n}<\frac{1}{\rho}-\delta,$$

即

$$|a_n|<n^{\left(\frac{1}{\rho}-\delta\right)n}.$$

另一方面，由 $\mathring{J}_\rho$ 的定义，当 n 充分大时，

$$|b_n|<n^{-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\delta\right)n},$$

因此 $\sum_n a_nb_n$ 是收敛的。

（2）假定

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|a_n|}{n\log n}\geqslant\frac{1}{\rho},$$

则有一数列 n_ν 使

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\frac{\log|a_{n_\nu}|}{n_\nu\log n_\nu}=\frac{1}{\sigma}\geqslant\frac{1}{\rho}.$$

取 $b_{n_\nu}=1/a_{n_\nu}$，其它的 $b_n=0$，则所得出的 $\nu(\theta)\in\mathring{J}_\rho$，而且 Σa_nb_n 发散.

（3）假定

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{|b_n|}}{n\log n}<\frac{1}{\rho},$$

则有一数列 n_ν 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{|b_{n_\nu}|}}{n_\nu\log n_\nu}=\frac{1}{\tau}<\frac{1}{\rho},$$

取 $a_{n_\nu}=1/b_{n_\nu}$ 及其它 $a_n=0$. 则定义一 $u(\theta)\in J_\rho$，而 Σa_nb^u 发散.

对应于 J_ρ 类中的一个广义函数 $u(\theta)$，我们引进一个函数

$$u_\rho(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}p_mr^m\sum_{|n|\leqslant m}a_ne^{in\theta},$$

这儿

$$p_m=1/(m!)^{\frac{1}{\rho}}.$$

由于有一 $\delta>0$ 使

$$\left|p_m\sum_{|n|\leqslant m}a_ne^{in\theta}\right|\leqslant\frac{\sum\limits_{|n|\leqslant m}|a_n|}{(m!)^{1/\rho}}=O\left(\frac{m\cdot m^{(\frac{1}{\rho}-\delta)m}}{m^{\frac{1}{\rho}m}}\right)$$

$$=O(m^{-\frac{1}{2}\delta m}).$$

可知在平面上任一紧致集 $u_\rho(r,\theta)$ 是一致（绝对）收敛的级数.

定理 2 对任一 $u \in J_\rho$ 及任一 $v \in \mathring{J}_\rho$, 则

$$(u,\bar{v}) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\rho(r,\theta)v(\theta)d\theta/J_\rho(r),$$

此处

$$J_\rho(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{(m!)^{1/\rho}}.$$

证 易知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\overline{v(\theta)}d\theta = \sum_l \sum_{n=0}^{\infty} p_m r^m \sum_{|n|\leqslant m} a_n \bar{b}_l$$
$$\times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-l)\theta}d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} p_m r^m \sum_{|n|\leqslant m} a_n \bar{b}_n.$$

由广义 Borel 求和定理（见本讲附录定理 3），可以推出本定理.

同样我们可以定义致零集，即为在开区间 $a<\theta<b$ 中的任一子闭区间中，当 $r\to\infty$ 时，

$$u_\rho(r,\theta)/J_\rho(r)$$

一致趋于 0. 这样开区间的总集合称为广义函数 $u(\theta)$ 的致零集，而致零集的补集中的点称为支点。

附记 由整函数论的知识可知 $\mathring{J}_\rho$ 就是所有的阶 $\leqslant \rho$ 的调和整函数的集合，而 J_ρ 中所施行的求和法就是广义 Borel 求和法.

前已提过两个 J_ρ 广义函数的卷积不一定是 J_ρ 广义函数，但如果考虑适合于

$$\log|a_n| = O(|n|\log|n|)$$

的广义函数所成的集 J，则 J 广义函数有以下的三性质：线性集；对微分运算自封；卷积仍然是 J 广义函数，而 $\mathring{J}$ 则由所

有的零阶整函数所组成的.

§7. （继　续）

我们还可以推得更广泛些．命

$$Q(r)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n r^n, \quad q_n \geqslant 0$$

表一幂级数,对所有的 r 都收敛.

以 I_Q 表适合于以下条件的广义函数的集合

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(|a_n|q_n)}{n\log n}<0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(|a_{-n}|q_n)}{n\log n}<0,$$

同法可证:

定理1　类 I_Q 的对偶类 $\mathring{I}_Q$ 是由适合于

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{q_n}{|b_n|}\right)}{n\log n}\geqslant 0, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{q_n}{|b_{-n}|}\right)}{n\log n}\geqslant 0$$

的广义函数所组成.

又易证,对 $u\in I_Q$, $v\in \mathring{I}_Q$ 常有

$$(u,\bar{v})=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_Q(r,\theta)\overline{v(\theta)}d\theta/Q(r),$$

这儿

$$u_Q(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} q_m r^m \sum_{|n|\leqslant m} a_n e^{in\theta}.$$

随便你给了怎样的广义函数,总可以选得合适的 q_n 使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(|a_n|q_n)}{n\log n}<0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(|a_{-n}|q_n)}{n\log n}<0.$$

换一句话说,任何复杂的广义函数,我们都有办法处理的.

§8. 极　　限

在一个广义函数类 T 中定义极限的方法如下：首先我们

假定T尽由普通函数所组成的.

$u_\nu(\theta)$ $(\nu=1,2,\cdots)$是T中的一个函数贯. $u(\theta)\in T$称为这贯的极限的定义是:对对偶类$\mathring{T}$中任一函数$v(\theta)$恒有

$$\lim_{\nu\to\infty}(u_\nu,\bar{v})=(u,\bar{v}).$$

至于T的对偶类$\mathring{T}$中的广义函数,通常是普通意义下的函数,我们在不同的情况下,分别给以普通函数的收敛作为其极限.

(i) 假定$v_\nu(r,\theta)$ $(\nu=1,2,\cdots)$是一个函数贯,在一个包有闭单位圆的域内都是调和的,且在这域内的任一紧致子集上一致收敛,则其极限函数$v(r,\theta)$显然在这域中是调和的,我们称$v(\theta)$为$v_\nu(\theta)$的极限,以$v_\nu(\theta)\to v(\theta)(\mathring{H})$表之.

对任一$u(\theta)\in H$,我们取$\delta(>0)$充分小,使所有的$v_\nu(r,\theta)$定义的域包含有以$r'=1+\dfrac{1}{2}\delta$为半径的闭圆. 由§3可知

$$(u(\theta),v_\nu(\theta))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\overline{v_\nu(r',\theta)}d\theta,$$

$$r=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\delta}.$$

由假设$v_\nu(r',\theta)$在半径为r'的闭圆内一致收敛,故有

$$\lim_{\nu\to\infty}(u,\bar{v}_\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\overline{v(r',\theta)}d\theta=(u,\bar{v}).$$

(ii) 假定$v_\nu(r,\theta)$ $(\nu=1,2,\cdots)$是一个函数贯,在单位圆内调和,在圆周上有无穷次微商,并且对任一$p\geqslant 0$,

$$\frac{\partial^p}{\partial\theta^p}v_\nu(r,\theta)$$

在闭单位圆上一致收敛,则不难推出其极限函数$v(r,\theta)$也在单位圆内调和,在圆周上有无穷次微商. 我们定义为$v_\nu(\theta)\to$

$v(\theta)(\mathring{S})$.

任与 S 类的一个广义函数

$$u(\theta)=\sum_n a_n e^{in\theta},$$

并设

$$v_\nu(\theta)=\sum_n b_n^{(\nu)} e^{in\theta},\quad v(\theta)=\sum_n b_n e^{in\theta}.$$

由于 $v_\nu(\theta)$ 在圆周上一致收敛，所以

$$\lim_{\nu\to\infty} b_0^{(\nu)}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_\nu(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)d\theta=b_0.$$

由§ 4 知，不妨假定 $u(\theta)$ 是连续函数 $w(\theta)$ 的 p 次微商，我们有

$$(u,\bar{v}_\nu)=a_0 b_0^{(\nu)}+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\overline{v_\nu^{(p)}(\theta)}d\theta.$$

我们假设了：在圆周上 $v_\nu^{(p)}(\theta)$ 也一致收敛于 $v^{(p)}(\theta)$，所以

$$\lim_{\nu\to\infty}(u,\bar{v}_\nu)=a_0 b_0+\frac{(-1)^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\lim_{\nu\to\infty}\overline{v_\nu^{(p)}(\theta)}d\theta=(u,\bar{v}).$$

这就是说，如果

$$v_\nu(\theta)\to v(\theta)\quad(\mathring{S}),$$

则恒有[1]

$$\lim_{\nu\to\infty}(u,\bar{v}_\nu)=(u,\bar{v}).$$

(iii) 假定 $v_\nu(r,\theta)(\nu=1,2,\cdots)$ 是一个整个平面上调和的函数贯．在任一紧致集上，这贯收敛于一个函数 $v(r,\theta)$，这样我们定义

$$v_\nu(\theta)\to v(\theta)\quad(\mathring{I}),$$

1）不难证明，这儿所定义的 $\mathring{S}$ 类的极限是与 L. Schwarz 所定义的极限是一样的．但值得注意的，这儿所定义的 L. Schwarz 广义函数类 S 时，并未假定这泛函的连续性，而这儿证明了连续性是必然的，不必在定义中假定的．

从 (i) 的证明中知道必然有

$$\lim_{\nu\to\infty}(u, \bar{v}_\nu) = (u, \bar{v}).$$

(iv) 假定 $v_\nu(r, \theta)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ 是一个零阶整调和函数贯，在平面任一紧致集上一致收敛于一函数 $v(r, \theta)$，假定它也是零阶的，则定义 $v_\nu(\theta) \to v(\theta)$ $(\mathring{J})$，同样有

$$\lim_{\nu\to\infty}(v, \bar{v}_\nu) = (u, \bar{v}).$$

由以上的这些例子，可以看出对应于任何一广义函数 T 的对偶类 $\mathring{T}$，我们总可以用相仿的方法适当地引进 $\mathring{T}$ 中的极限概念，使得下面的关系成立

$$\lim_{\nu\to\infty}(u, \bar{v}_\nu) = (u, v),$$

这里不一一列举，读者可试作之。

§9. 附 记

(1) 从复变函数论的眼光来看，我们之所以引进这些广义函数类是十分自然的. 因为

类	类中函数的说明
$\mathring{K}$	有限和(调和多项式)
$\mathring{G}_p$	零阶 p 型的调和整函数
$\mathring{J}$	零阶调和整函数
$\mathring{I}$	所有的调和整函数
$\mathring{H}$	调和函数的有则域是以闭单位圆的点为其内点者

并且有关系

$$\mathring{K} \subset \mathring{J} \subset \mathring{I} \subset \mathring{H} \subset H \subset I \subset J \subset K.$$

利用整函数的阶在 $\mathring{J}$ 与 $\mathring{I}$ 之间还可以插进 J_ρ.

在 $\mathring{H}$ 与 H 之间还可以利用调和函数的边界函数的性质插入其他类，如 §2 例三所列.

另一方面从发散级数的求和理论，我们的讨论也有它的系统性的意义.

(2) 由§ 2 的定理 1 与 4 可知,从系数的无穷大的阶来分类也是极自然的,有系统性的,主要的类是:

类	$\log\lvert a_n\rvert$ 的阶
S	$O(\log n)$
H	$o(n)$
I	$O(n)$
J	$O(n\log n)$
G_p	$o(n^p)$, $p>1$

(3) 由保角变换的基本定理，我们所讨论的类 H，实质上并不限于单位圆. 我们可以考虑任何平面上的有一点以上边界的单连通域,特别是上半平面与实数轴.

另一方面,由于 Fourier 级数与 Fourier 积分的相似性质,我们可以直接考虑"形式 Fourier 积分":

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a(t)e^{itx}dt.$$

如果 $\log\lvert a(t)\rvert=o(t)$,则$u(x)$称为属于$H$类,如果$\log\lvert a(t)\rvert=O(\log\lvert t\rvert)$,则 $u(x)$ 称为属于 S 类,其对应的调和函数是

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a(t)e^{itx-\lvert t\rvert y}dt,\quad y>0.$$

(4) 更一般些,从推广 § 2 的定理 1 与 4 入手: 命 R_n 表 n 维实 Euclid 空间, $t=(t_1,\cdots,t_n)$ 表其中的一点,又命

$$\tau=\sqrt{t_1^2+\cdots+t_n^2}.$$

与定理 1 相仿我们有以下的结果.

命 $\varphi(\tau)$ 表一单变数 $\tau(\geqslant 0)$ 的正递增函数，且对任一 $\delta>0$ 积分

$$\int_0^{\infty}(\varphi(\tau))^{-\delta}\tau^{-1}d\tau \tag{1}$$

常收敛.

命 A 代表适合以下条件的函数 $a(t)$:(i) 在任一有限区间中 $a(t)$ 是平方可积及(ii) 除一测度为零的集合外，当 τ 充分大时

$$\log|a(t)| = o(\log\varphi(\tau)). \tag{2}$$

又命 B 代表适合以下条件的函数 $b(t)$:(i) 在任一有限区间中 $b(t)$ 是平方可积及 (ii) 除一测度为零的集合外，当 τ 充分大时

$$\log\varphi(\tau) = O\left(\log\frac{1}{|b(t)|}\right). \tag{3}$$

如此,则 A 与 B 之间有以下的三性质: (i)如果 $a(t)\in A$, $b(t)\in B$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int a(t)\overline{b(t)}\,dt_1\cdots dt_n < \infty, \tag{4}$$

(ii) 如果对 B 中任一 $b(t)$,(4) 式常收敛,则 $a(t)\in A$, (iii) 如果对 A 中任一 $a(t)$, (4) 式常收敛,则 $b(t)\in B$.

证明从略,还有与定理 4 相仿的结果.

命 $\mathring{K}$ 表

$$v(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int b(t)e^{-itx'}dt_1\cdots dt_n$$

所成的广义函数，此处 $tx' = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$. 这积分是绝对收敛的.

积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int a(t)\overline{b(t)}\,dt$$

可以看成为 $a(t)(\in A)$ 的一个线性泛函,因而定义了一个广义函数 $u(x)$, 且

$$(u(x),\overline{v(x)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int a(t)\overline{b(t)}\,dt_1\cdots dt_n,$$

这 $u(x)$ 可以用形式 Fourier 积分

$$u(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int a(t)e^{-itx'}dt_1\cdots dt_n$$

来表达. 这样的 $u(x)$ 可以用以下的方法实现出来:

(1) 若对任一 $\varepsilon>0$, $a(t)=O(e^{\varepsilon|t|})$, 则用

$$u(x,y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int a(t)e^{-itx'-|t|y'}dt_1\cdots dt_n,$$

这儿 $|t|=(|t_1|,\cdots,|t_n|)$, 而

$$(u(x),\overline{v(x)})=\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int u(x,y)\overline{v(x)}dx.$$

(2) 其他的情况可引进

$$u(x,r)=\int_0^{\infty}\frac{r^\nu d\nu}{\varphi(\nu)}\int_{\tau<\nu}a(t)e^{-itx'}dt\Big/\int_0^{\infty}\frac{r^\nu d\nu}{\varphi(\nu)},$$

而

$$(u(x),\overline{v(x)})=\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int u(x,r)\,\overline{v(x)}dx_1\cdots dx_n.$$

这方法似乎比 L. Schwarz 的方法有显著的优点.

(3) 我们也可以用任一椭圆型偏微分方程来代替 Laplace 方程,如此对应一个域内的解,我们在边界上可以定义一广义函数理论,当然还可以推得更广些,如我们所研究过的典型域的调和函数与特征流形上的 Fourier 分析等等.

附 录 求和法

定理 1 命 $q_\nu(r)$ 是一函数贯, 在一以 r_0 为右端的区间内定义,并假定有以下的性质:

(i) $$q_\nu(r)\geqslant 0,$$

(ii) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu(r)=1,\quad r<r_0,$$

并对任一 ν

(iii) $$\lim_{r\to r_0} q_\nu(r) = 0,$$

则由 $s_n \to s$ 可推得

$$\lim_{r\to r_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(r) s_\nu = s.$$

证 并不失去普遍性可以假定 $s=0$，对任与 $\varepsilon>0$，我们有M使当$\nu \geqslant M$时，$|s_\nu|<\varepsilon$，并可假定对所有的ν，$|s_\nu| \leqslant B$，则

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu(r) s_\nu\right| \leqslant B\sum_{\nu=0}^{M} q_\nu(r) + \varepsilon \sum_{\nu=M+1}^{\infty} q_\nu(r)$$

$$\leqslant B\sum_{\nu=0}^{M} q_\nu(r) + \varepsilon.$$

当 $r\to r_0$ 时，右边趋于 ε. 故得所证.

现在取两个重要特例:

(1) 取 $r_0=1$, $q_\nu(r)=(1-r)r^\nu$，则条件 (i)、(ii)、(iii) 都适合，所以当 $r\to 1$ 时

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(1-r)r^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}(s_\nu - s_{\nu-1})r^\nu \to \lim_{\nu\to\infty} s_\nu.$$

这就是

定理 2 (Abel) 若

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

收敛于 s，则当 $r\to 1$ 时

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu$$

也趋于 s.

(2) 假定

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu r^\nu, \quad p_\nu \geqslant 0$$

是一处处收敛的幂级数．命

$$q_\nu(r)=p_\nu r^\nu\Big/\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu r^\nu,$$

则 (i)、(ii) 显然适合．由于

$$\lim_{r\to\infty}q_\nu(r)=\lim_{r\to\infty}\frac{\nu p_\nu r^{\nu-1}}{\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu p_\nu r^{\nu-1}}=\cdots=0,$$

由此得出

定理 3 (Borel) 若

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu r^\nu,\ p_\nu\geqslant 0$$

是一处处收敛的幂级数．如果 $s_\nu\to s$，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu r^\nu s_\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty}p_\nu r^\nu}=s.$$

定理 1 还有其类似的积分定理．

定理 4 命 $q(r,\theta)$ 是一函数在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 及 $0\leqslant r<1$ 中定义且有次之性质:

(i) $q(r,\theta)\geqslant 0$,

(ii) $\int_0^{2\pi}q(r,\theta)d\theta=1$

及对任一 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{r\to 1}\int_{|\theta|\geqslant\varepsilon}q(r,\theta)d\theta=0.$$

如此，若当 $\theta\to\pm 0$ 时，$f(\theta)\to s$，则

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}q(r,\theta)f(\theta)d\theta=s.$$

(此处假定式 $f(\theta)$ 是囿变函数.)